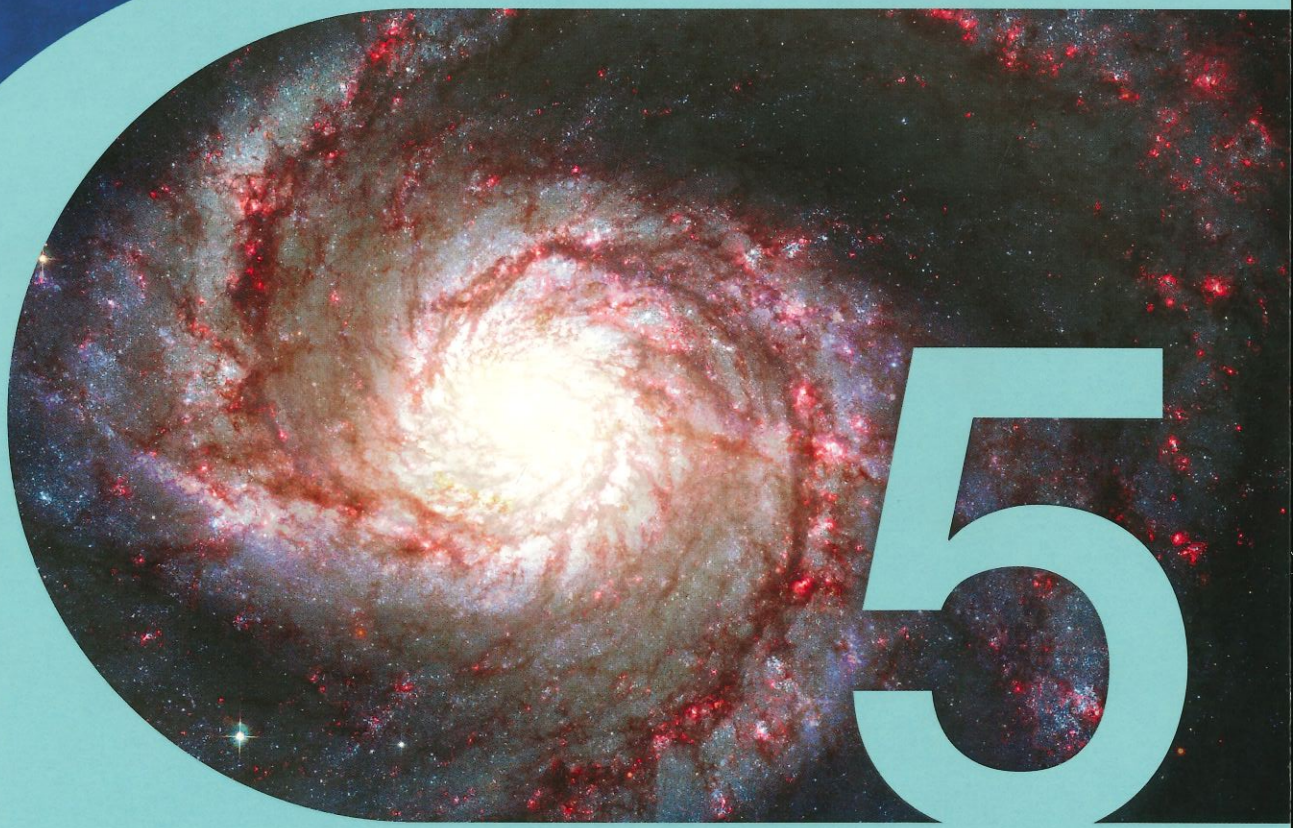
Dinámica

MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA



5

MATERIAL DE PROMOCIÓN
PROHIBIDA SU VENTA

puerto de palos

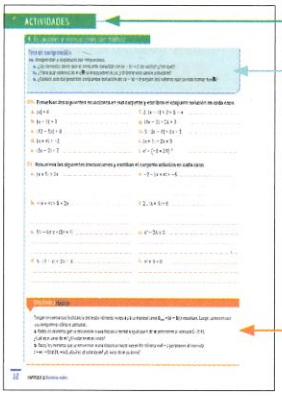
Dinámica Matemática 5

Es una nueva propuesta que facilita el aprendizaje de la matemática a través de 518 actividades que favorecen la comprensión de los distintos temas.

▶ SABERES DINÁMICOS se presentan definiciones, clasificaciones, procedimientos básicos y ejemplos de cada contenido que facilitan la comprensión.

Dinámica TConecta se presentan enlaces web con demostraciones, ejemplos, procedimientos, etcétera.

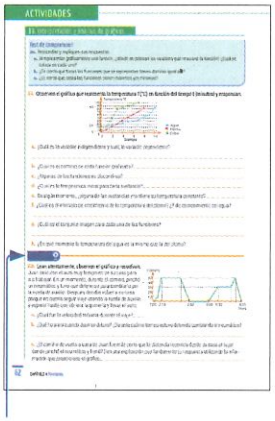
Áreas dinámicas [Matemática y...] se integran contenidos del área con saberes de otras áreas.



ACTIVIDADES para cada tema se proponen distintas actividades que están relacionadas de manera secuencial.

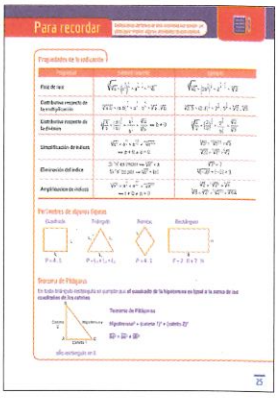
TEST DE COMPRENSIÓN se presentan preguntas básicas que permiten evaluar la comprensión de la teoría y trabajar sobre errores frecuentes.

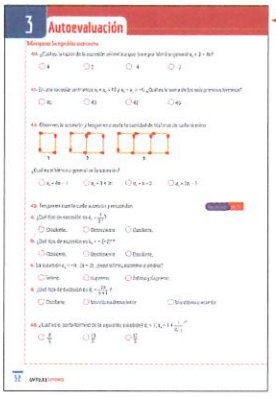
DinámicaMente propone situaciones problemáticas con un mayor nivel de complejidad.



actividades del estilo de las evaluaciones educativas nacionales e internacionales.

explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades.





Autoevaluación incluye más actividades para que cada alumno pueda evaluar los conocimientos adquiridos durante el capítulo.

Integración incluye más actividades para resolver en la carpeta.

actividades para realizar en grupos.

Trabajo con capacidades

En todos los capítulos se ofrecen variadas actividades orientadas a desarrollar valores y habilidades del ciudadano del siglo XXI.

ÍNDICE

Capítulo 1: NÚMEROS REALES

1. Los números reales. 5
2. Intervalos. 7
3. Valor absoluto de un número real. 9
4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo. 11

Integración 1-2-3-4 15

5. Radicales. Suma y resta con radicales. 17
6. Racionalización de denominadores. 19
7. Los números complejos. 21

Integración final 23
Para recordar 25
Autoevaluación 26

Capítulo 2: CÓNICAS

8. Circunferencia. 27
9. Elipse 29
10. Parábola. 31
11. Hipérbola. 33

Integración final 35
Para recordar 37
Autoevaluación 38

Capítulo 3: SUCESIONES

12. Sucesiones. Sucesiones aritméticas 39
13. Sucesiones geométricas 41
14. Análisis de sucesiones. 43
15. Clasificación de sucesiones. 45

Integración final 49
Para recordar 51
Autoevaluación 52

Capítulo 4: FUNCIONES

16. Funciones. 53
17. Función inversa 57
18. Composición de funciones. 59
19. Interpretación y análisis de gráficos. 61

Integración 16-17-18-19 63

20. Función lineal 65
21. Función cuadrática. 69
22. Ecuaciones cuadráticas. 73
23. Función polinómica. 75
24. Análisis de la función polinómica. 77

Integración final 81
Para recordar 83
Autoevaluación 84

Capítulo 5: FUNCIONES RACIONALES

25. Expresión algebraica fraccionaria. 85
26. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. 87
27. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. 89

Integración 25-26-27 91

28. Función racional 93
29. Representación gráfica de funciones racionales. 95
30. Función homográfica. 99

Integración final 103
Para recordar 105
Autoevaluación 106

Capítulo 6: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

31. Logaritmos. 107
32. Ecuaciones logarítmicas. 109
33. Ecuaciones exponenciales 113

Integración 31-32-33 117

34. Función logarítmica. 119
35. Función exponencial. 123

Integración final 127
Para recordar 129
Autoevaluación 130

Capítulo 7: TRIGONOMETRÍA

36. Sistema de medición de ángulos. 131
37. Razones trigonométricas 133
38. Valores exactos. Relación con el cuadrante I. 137
39. Ecuaciones trigonométricas. 139

Integración 36-37-38-39 141

40. Triángulos rectángulos. 143
41. Teoremas del seno y del coseno. 147
42. Triángulos oblicuángulos 149

Integración final 153
Para recordar 155
Autoevaluación 156

Capítulo 8: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

43. Estadística. Intervalos de clase. 157
44. Parámetros de posición. 159
45. Parámetros de dispersión 161

Integración 43-44-45 165

46. Probabilidad. 167
47. Sucesos y probabilidad condicional. 169

Integración final 173
Para recordar 175
Autoevaluación 176

1 Números reales

1. Los números reales

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen diferentes tipos de números que forman el conjunto de los **números reales** (ℝ).

- Los primeros que se pueden mencionar son los **números naturales** (ℕ): 1, 2, 3, 4, ...
- Si a estos números se les agregan los negativos y el cero, se forman los **números enteros** (ℤ): ..., −2, −1, 0, 1, 2, ...
- Al tomar la razón entre dos enteros (con el divisor distinto de cero), se construye el conjunto de los **números racionales** (ℚ). Entonces, cualquier número racional **r** puede expresarse como:

$$r = \frac{m}{n} \text{ con } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ \text{y } n \neq 0$$

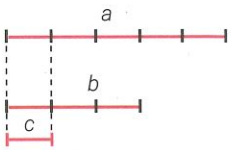
- También hay números reales que no se pueden expresar como una razón entre enteros, que son los **números irracionales** (𝕀), cuya característica es que tienen infinitas cifras decimales no periódicas: π , $\sqrt{2}$, 1,243091...

TIP

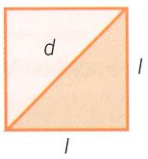
∈ significa pertenece.
∧ significa y.

Segmentos conmensurables e inconmensurables

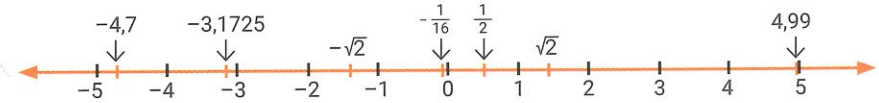
Dos segmentos **a** y **b** son **conmensurables** cuando existe un tercer segmento **c** que entra una cantidad de veces entera en cada uno de los segmentos **a** y **b**.



En cambio, cuando no existe un tercer segmento **c**, los segmentos son **inconmensurables**, como lo son la diagonal de un cuadrado con respecto a uno de sus lados. La razón de la diagonal **d** de un cuadrado y su lado **l** es inconmensurable, es decir, es un **número irracional**.



Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, llamada **recta real**. Se toma un punto como referencia llamado **origen** (número real **0**). Todo número positivo se representa por un punto a la derecha del origen y todo número negativo, por un punto a la izquierda del origen.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/raiz2 * para mirar un video en el que se demuestra geométricamente que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

*Enlace acortado de https://youtu.be/1cJ9_8hDUNs

Los números reales forman un conjunto:

- **Ordenado**: es posible decir que un número real **a** es menor que **b** y se simboliza como **a < b**. Esto significa que, en la recta real, **a** se encuentra a la izquierda de **b**.
- **Denso**: entre dos números reales siempre existe otro número real.
- **Continuo**: a cada número le corresponde un punto en la recta y recíprocamente.

Aproximación y redondeo

Para **aproximar un número por redondeo**, debe primero explicitarse hasta qué cifra decimal se va a considerar como representativa y luego tener en cuenta la cifra que se encuentra a su derecha, así:

- si la cifra de la derecha es 0, 1, 2, 3 o 4, la cifra considerada se deja igual y se produce un error por defecto.
- si la cifra de la derecha es 5, 6, 7, 8, 9, a la cifra considerada se le suma 1 y se comete un error por exceso.

ACTIVIDADES

1. Los números reales

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Los lados de un rectángulo miden respectivamente 6,5 cm y 5,2 cm. ¿Son conmensurables?

b. El diámetro de una circunferencia y su perímetro ¿son magnitudes conmensurables? ¿Por qué?

c. ¿Es correcto afirmar que $\pi = 3{,}142$? ¿Por qué?

2. Determinen si los siguientes números son racionales o irracionales.

a. $\frac{\pi}{2}$ _____ **c.** $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$ _____ **e.** $\sqrt[3]{0{,}027}$ _____

b. $2{,}1\widehat{9}$ _____ **d.** $\frac{25}{16}$ _____ **f.** $(3^2\pi + 1) - (\sqrt{25} + 2^2)\pi$ _____

3. Escriban >, < o = según corresponda, sin utilizar la calculadora.

a. $1{,}732 \square \sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{47} \square \sqrt{7^2 - 2}$ **e.** $\frac{40}{33} \square 1{,}21$

b. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \square \sqrt{\frac{5}{4}}$ **d.** $\sqrt{8} \square \sqrt{18}$ **f.** $1{,}0\widehat{5} \square \frac{19}{18}$

4. Escriban >, < o = según corresponda, teniendo en cuenta las condiciones dadas en cada caso.

a. Si $a > c > 0$, entonces $\sqrt{c} \square \sqrt{a}$.

b. Si $0 < a < 1$, entonces $\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$.

c. Si $a > 1$, entonces $\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$.

d. Si $a > c > 0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{a}} \square \frac{1}{\sqrt{c}}$.

5. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen en sus carpetas los casos falsos.

a. Toda fracción es un número racional. ☐

b. Todo número racional tiene una expresión decimal. ☐

c. Todo número decimal se puede expresar como fracción. ☐

d. Todo número irracional tiene una expresión decimal. ☐

e. Todo número irracional tiene una expresión como fracción. ☐

f. Un número real puede ser racional e irracional a la vez. ☐

g. El conjunto de los números naturales es denso. ☐

6. Tengan en cuenta las condiciones pedidas en cada caso y respondan. Expliquen las respuestas.

a. $x \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? _____

b. $x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? _____

c. $x \in \mathbb{I} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? _____

7. Aproximen cada uno de los siguientes números reales según lo indicado en cada caso.

a. $\sqrt{2}$ a los milésimos. _____ **c.** π a los décimos. _____

b. $1{,}31\widehat{6}$ a los centésimos. _____ **d.** $\frac{3}{2}\pi$ a los centésimos. _____

2. Intervalos

▶ SABERES DINÁMICOS

Intervalos reales

Ciertos conjuntos de números reales se denominan **intervalos**, y se representan geométricamente con semirrectas o segmentos sobre la recta real. Si **a** y **b** son **números reales** tales que **a < b**, entonces existen las siguientes posibilidades:

Notación	Propiedad del conjunto	Representación sobre la recta real
(a; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b$	
[a; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b$	
[a; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b$	
(a; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b$	
(a; +∞)	$x \in \mathbb{R} \wedge x > a$	
[a; +∞)	$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a$	
(−∞; b)	$x \in \mathbb{R} \wedge x < b$	
(−∞; b]	$x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b$	
(−∞; +∞)	$x \in \mathbb{R}$	

Debe notarse que se utilizan:

- **Paréntesis** cuando el o los extremos **no pertenecen al intervalo**.
- **Corchetes** cuando el o los extremos **pertenecen al intervalo**.
- **Paréntesis** cuando alguno de los extremos (o ambos) es **infinito**.

TIP

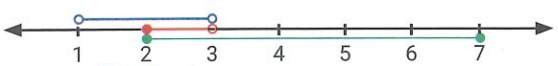
∩ significa intersección.
∪ significa unión.
⇒ significa entonces.
∨ significa o.

Uniones e intersecciones de intervalos

La **intersección de dos intervalos (∩)** consta de los números reales que están en ambos intervalos a la vez.
La **unión de dos intervalos (∪)** consta de los números que están en un intervalo o en el otro, es decir, en ambos.

a. $(1; 3) \cap [2; 7] \rightarrow x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3 \wedge 2 \leq x \leq 7 \rightarrow$

$\Rightarrow (1; 3) \cap [2; 7] = [2; 3)$



$[2; 3)$

b. $(1; 3) \cup [2; 7] \rightarrow x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3 \vee 2 \leq x \leq 7 \rightarrow$

$\Rightarrow (1; 3) \cup [2; 7] = (1; 7]$

$(1; 7]$

En estos ejemplos, para una mejor visualización, usamos **círculos sin relleno** en lugar de **paréntesis** y **círculos con relleno** en lugar de **corchetes**.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/repin * para observar cómo se representan los intervalos en la recta real usando GeoGebra.

*Enlace acortado dehttps://www.geogebra.org/m/bw85KpRz

ACTIVIDADES

2. Intervalos

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿A cuál de los siguientes intervalos pertenece el número π: (3,15; 4) o (3,14; 4)?

b. ¿Es cierto que la unión entre los intervalos $(-\infty; 2)$ y $(2; +\infty)$ es el conjunto de los números reales?

c. ¿Es cierto que la intersección entre los intervalos (1; 1,41) y $(\sqrt{2}; 2)$ es vacía?

9. Completen la siguiente tabla.

Notación de intervalos	Propiedad del conjunto	Representación gráfica
$(-\infty; -4]$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \wedge 3 \leq x \leq \frac{11}{2}\right\}$	
$(-1; 7)$		
	$\{x \in \mathbb{R} \wedge x < 10\}$	
$(\sqrt{2}; 8]$		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$	

10. Indiquen el intervalo solución en cada caso y representen el resultado en la recta real.

a. $(-2; 0) \cup (-1; 1) =$ _____

b. $[-4; 6] \cap [0; 8] =$ _____

c. $(-\infty; 6) \cup (2; 10) =$ _____

d. $(-2; 4) \cap [0; +\infty) =$ _____

e. $(-3; \pi] \cap [3,15; +\infty) =$ _____

f. $(-\infty; -1] \cup (-2; +\infty) =$ _____

11. Escriban ∪ (unión) o ∩ (intersección) según corresponda para que se verifique la igualdad.

a. $[-5; 6) \square [0; 6] = [0; 6)$

b. $(-\infty; -1] \square (-2; 4] = [-\infty; 4]$

c. $(-\infty; 4) \square (4; 5] = \emptyset$

d. $(-\infty; 2] \square (1; +\infty) = \mathbb{R}$

12. Tengan en cuenta los conjuntos A, B y C e indiquen el conjunto solución en cada caso. Representen el intervalo solución en una recta real en sus carpetas.

$A = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 4\}$ $C = \{x \in \mathbb{R} \wedge -1 < x \leq 5\}$

a. $B \cup C =$ _____ **b.** $B \cap C =$ _____ **c.** $A \cap C =$ _____ **d.** $A \cap B =$ _____

3. Valor absoluto de un número real

▶ SABERES DINÁMICOS

El **valor absoluto** o **módulo de un número real x** se denota por **|x|** y representa su distancia al 0 sobre la recta real, por ser la distancia siempre positiva o cero, para todo $x \in \mathbb{R}$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert x\rvert \geq 0$	$\lvert -2\rvert = -(-2) = 2 \geq 0$ $\lvert 4\rvert = 4 \geq 0$ $\lvert 0\rvert = 0 \geq 0$	El valor absoluto de un número real siempre es positivo o cero.
2. $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	$\lvert \pi\rvert = \lvert -\pi\rvert$ $\lvert 2\rvert = \lvert -2\rvert$	Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	$\lvert -3 \cdot 6\rvert = \lvert -3\rvert \cdot \lvert 6\rvert$ $\lvert -18\rvert = 3 \cdot 6$ $18 = 18$	El valor absoluto de un producto entre dos números reales es equivalente al producto de los valores absolutos de cada uno de los números reales.
4. $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ con $y \neq 0$	$\left\lvert \frac{10}{-5} \right\rvert = \frac{\lvert 10\rvert}{\lvert -5\rvert}$ $\lvert -2\rvert = \frac{10}{5}$ $2 = 2$	El valor absoluto del cociente entre dos números reales es el cociente entre los valores absolutos de los números reales.
5. $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert 2 + (-6)\rvert \leq \lvert 2\rvert + \lvert -6\rvert$ $\lvert -4\rvert \leq 2 + 6$ $4 \leq 8$	El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos de cada uno de los números reales (desigualdad triangular).

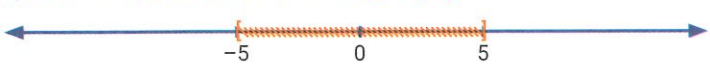
Las siguientes propiedades del valor absoluto permiten resolver inecuaciones.

6. Si $k > 0$, $|x| > k \Rightarrow x < -k \vee x > k \Rightarrow x \in (-\infty; -k) \cup (k; +\infty)$

$|x| > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

7. Si $k > 0$, $|x| < k \Rightarrow x < k \wedge x > -k \Rightarrow x \in (-k; k)$

$|x| \leq 5 \Rightarrow x \leq 5 \wedge x \geq -5 \Rightarrow x \in [-5; 5]$



ACTIVIDADES

3. Valor absoluto de un número real

Test de comprensión

13. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Para qué valores de **x** se cumple que $|x| > -1$? ¿Y para cuáles $|x| < 0$?

b. ¿Es cierto que $|-(x \cdot y)| = |x| \cdot |y|$?

c. ¿Es cierto que $|x - y| = |y - x|$?

14. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. $|3 + (-4)| = |3| + |-4| = 3 + 4 = 7$ ☐

b. $\frac{|-4|}{|5|} = \frac{|4|}{-5}$ ☐

c. Si $x > 0$, $|3x - 5x| = 2x$ ☐

d. Si $x < 0$, $|2x + 3x| = 5x$ ☐

e. Si $x > 0 \wedge y < 0$, $|x \cdot y| = x \cdot y$ ☐

f. Si $|x| > 4 \Rightarrow x \in (-4; 4)$ ☐

15. Unan cada expresión con su conjunto solución.

a. $\|x\| = 2$	• $S = \mathbb{R}$
b. $\|x\| > 2$	• $S = (-2; 2)$
c. $\|x\| < 2$	• $S = \emptyset$
d. $-\|x\| > 1$	• $S = \{-2; 2\}$
e. $-\|x\| < 4$	• $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

16. Expresen el conjunto de valores que puede tomar la variable en cada caso. Luego, representen en la recta real.

a. $|x| < 4 \wedge x > 0$ _____

b. $2|x| > 6 \wedge |x| \leq 4$ _____

c. $5 - |x| \geq 3 \wedge |x| \neq 2$ _____

d. $\left|\frac{x}{-2}\right| \geq 3 \wedge x \leq -4$ _____

17. Expresen en lenguaje simbólico y hallen el conjunto solución.

a. Todos los números reales cuya distancia a cero sea menor que 1. _____

b. Todos los números reales cuya distancia a cero sea mayor o igual que 2. _____

18. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen en sus carpetas los casos falsos.

a. Los números opuestos tienen el mismo valor absoluto. ☐

b. El valor absoluto de una suma es mayor o igual a la suma de los valores absolutos. ☐

c. El valor absoluto de un valor real puede ser negativo. ☐

d. El valor absoluto del cuadrado de un número es igual al cuadrado de su valor absoluto. ☐

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

▶ SABERES DINÁMICOS

Para resolver **ecuaciones e inecuaciones con módulo** es necesario tener en cuenta la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• Para **resolver ecuaciones** en las que la incógnita está dentro de un **módulo**, se deben tener en cuenta tanto la definición de módulo como sus propiedades.

$x + 3 \cdot |x - 2| = 2x + 1$

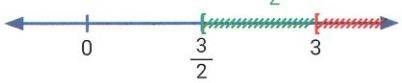
$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$	v	$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$	Condición necesaria.
$x + 3 \cdot (x - 2) = 2x + 1$	v	$x + 3 \cdot (-x + 2) = 2x + 1$	Se elimina el módulo aplicando
$x + 3x - 6 = 2x + 1$	v	$x - 3x + 6 = 2x + 1$	la definición.
$4x - 2x = 1 + 6$	v	$-2x - 2x = 1 - 6$	
$2x = 7 \Rightarrow x = 3{,}5$	v	$-4x = -5 \Rightarrow x = 1{,}25$	
$x \geq 2 \wedge x = \frac{7}{2}$	v	$x < 2 \wedge x = \frac{5}{4}$	Se determina el conjunto solución.

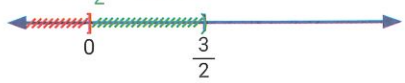
***Solución* = $\left\{\frac{5}{4}; \frac{7}{2}\right\}$**

• En el caso de las **inecuaciones**, se debe recordar que al multiplicar o dividir por un número negativo a ambos lados de la desigualdad, el sentido de esta cambia.

$4 + |2x - 3| \geq 7$

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$	v	$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$	Condición necesaria.
$4 + 2x - 3 \geq 7$	v	$4 - 2x + 3 \geq 7$	Se elimina el módulo aplicando
$2x \geq 7 - 4 + 3$	v	$-2x \geq 7 - 4 - 3$	la definición.
$2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$	v	$2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$	
$x \geq \frac{3}{2} \wedge x \geq 3$	v	$x < \frac{3}{2} \wedge x \leq 0$	Se determina el conjunto solución.

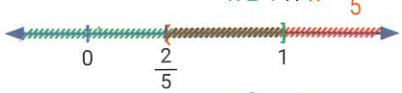




$S_1 = [3; +\infty)$ $S_2 = (-\infty; 0]$ ***Solución* = $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$**

$3 \cdot |1 - x| < 2x + 1$

$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$	v	$1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$	Condición necesaria.
$3 \cdot (1 - x) < 2x + 1$	v	$3 \cdot (-1 + x) < 2x + 1$	Se elimina el módulo aplicando
$3 - 3x < 2x + 1$	v	$-3 + 3x < 2x + 1$	la definición.
$-3x - 2x < 1 - 3$	v	$3x - 2x < 1 + 3 \Rightarrow x < 4$	
$-5x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$	v		
$x \leq 1 \wedge x > \frac{2}{5}$	v	$x > 1 \wedge x < 4$	Se determina el conjunto solución.



$S_1 = \left(\frac{2}{5}; 1\right]$ $S_2 = (1; 4)$ ***Solución* = $\left(\frac{2}{5}; 4\right)$**

ACTIVIDADES

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

Test de comprensión

19. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es correcto decir que el conjunto solución de $|x - k| < 0$ es vacío? ¿Por qué?

b. ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la inecuación $k|x| \geq 0$ tiene una única solución?

c. ¿Cuáles son los posibles conjuntos solución de $|x - a| = b$ según los valores que pueda tomar $b \in \mathbb{R}$?

20. Resuelvan las siguientes ecuaciones en sus carpetas y escriban el conjunto solución en cada caso.

a. $|x| = 4$

b. $|x - 1| = 3$

c. $|12 - 5x| = 8$

d. $|x + 4| = -2$

e. $|3x - 2| = 7$

f. $3 . |x - 1| + 2 = 5 - x$

g. $|4x - 2| = 2x + 3$

h. $5 . |3x - 1| = 6x - 5$

i. $|x + 1| = 2x + 3$

j. $x^2 = (-8 + 24)^{-1}$

21. Resuelvan las siguientes inecuaciones y escriban el conjunto solución en cada caso.

a. $|x + 5| \geq 2x$

b. $-|x + 4| > 5 + 2x$

c. $11 - 6x \leq -|2x + 1|$

d. $5 . |1 - x| > 2x - 3$

e. $-2 - |x + 4| > -5$

f. $2 . |x + 1| < 6$

g. $x^2 - 36 \geq 0$

h. $x^2 + 9 < 0$

DinámicaMente

Tengan en cuenta que la distancia entre dos números reales **a** y **b** se expresa como $D_{(a,b)} = |a - b|$ y resuelvan. Luego, comenten con sus compañeros cómo lo pensaron.

a. Todos los números que se encuentran a una distancia menor o igual que 4 de **m** pertenecen al intervalo $[-2; 6]$.
¿Cuál es el valor de **m**? ¿El valor de **m** es único?

b. Todos los números que se encuentran a una distancia mayor que **m** del número real -1 pertenecen al intervalo $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$. ¿Cuál es el valor de **m**? ¿El valor de **m** es único?

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

22. Reúnanse en grupos, tengan en cuenta la ecuación "$|2x - a| = a + 1$" y marquen con una X los valores de "a" que verifican lo pedido en cada caso.

a. $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right\}$	• $a = 1$ ☐	• $a = 3$ ☐	• $a = 4$ ☐
b. $S = \emptyset$	• $a < -1$ ☐	• $a \leq 1$ ☐	• $a > -1$ ☐
c. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	• $a < -1$ ☐	• $a = -1$ ☐	• $a = 1$ ☐

23. Planteen la ecuación o inecuación correspondiente y hallen el conjunto solución.

a. El módulo de la diferencia entre el doble de un número real y 6 es el doble de 4.

b. El módulo de la diferencia entre un número real y 8 es menor o igual que 3.

c. El módulo de la diferencia entre la mitad de un número real y 1 es mayor que $\frac{1}{2}$.

24. Unan con flechas cada ecuación con el conjunto solución correspondiente.

a. $2x + 1 = \|x - 4\|$	• $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$
b. $2x - \|x + 4\| = 3$	• $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$
c. $2x - 1 = \|x - 4\|$	• $S = \{1\}$
d. $x - 3 = \|x - 4\|$	• $S = \{7\}$

25. Resuelvan las inecuaciones y representen el conjunto solución en la recta real.

a. $|x + 1| - 2 \,.\, (x - 4) \geq 1$

b. $1 - (2x - 3) < |2 - x|$

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

26. Escriban una inecuación con módulo tal que el conjunto solución sea el indicado en cada caso.

a. $S = \emptyset$

b. $S = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$

c. $S = [-5; -3]$

d. $S = \mathbb{R}$

27. Resuelvan las siguientes inecuaciones, indiquen el conjunto solución y grafíquenlo en la recta real.

a. $|2 - x| \geq \frac{3}{2}$

b. $|2x - 1| < x + 2$

c. $x - 3 \geq x + 1 - 2 \cdot \left|x - \frac{x + 2}{3}\right|$

d. $|2x + 3| \leq |x - 1|$

e. $1 - 2 \cdot |x + 1| < 2$

f. $\left|\frac{-x + 5}{2}\right| > 3 \cdot \left|\frac{x + 1}{2}\right|$

28. Tengan en cuenta que "$a > 0$" y unan cada inecuación con su conjunto solución.

a. $|x - a| > a$

b. $|x - a| < a$

c. $|x + a| > a$

d. $|x + a| < a$

e. $|a - x| > a$

f. $|a - x| < a$

- $(-2a; 0)$
- $(-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$
- $(0; 2a)$
- $(-2a; 2a)$
- $(-\infty; 0) \cup (2a; +\infty)$

29. Lean atentamente y resuelvan.

Los líquenes tienen una forma aproximada al círculo y la relación entre el diámetro y la edad se puede expresar mediante la fórmula $d = 0{,}7 \times \sqrt{t - 12}$ para $t \geq 12$ (d: diámetro en mm; t: años).

a. ¿Cuál será el diámetro a los 16 años?

b. Si el diámetro de un liquen es 35 mm, ¿cuántos años han transcurrido desde su aparición?

30. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La diagonal de un cuadrado es un segmento conmensurable respecto de la longitud de su lado. ☐

b. El número 3,141 es una aproximación del número π a los milésimos. ☐

c. $-\sqrt[3]{343}$ es un número entero. ☐

d. Si un número es racional, entonces es real y viceversa. ☐

e. La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional. ☐

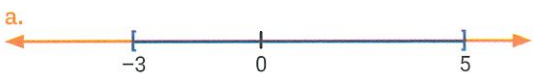
f. $\sqrt{3}$ aproximado a los milésimos da por resultado 1,732. ☐

g. Se puede expresar el conjunto de los números reales como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. ☐

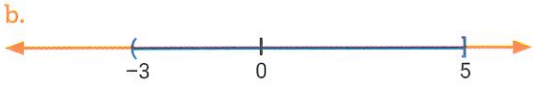
h. El conjunto de los números naturales es ordenado y denso. ☐

31. Expresen cada conjunto como intervalos.

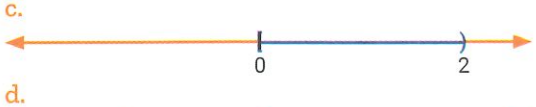
a.



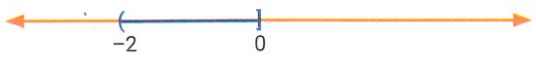
b.



c.



d.



32. Rodeen el conjunto solución correspondiente a cada inecuación.

a. $|x| < 4$

• $(-4; 4)$ • $[-4; 4]$ • $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

b. $|x - 1| > 3$

• $(-2; 4)$ • $\emptyset$ • $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

c. $|2x + 1| < 0$

• $\mathbb{R}$ • $\emptyset$ • $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

d. $-|x + 2| \leq -2$

• $[-4; 0]$ • $\emptyset$ • $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$

33. Completen la tabla con los conjuntos solución correspondientes. Luego, representen cada intervalo en una recta real.

Expresión como ecuación/inecuación	Expresión como conjunto solución
$x \geq 0 \wedge \lvert x\rvert < 1$	
$\lvert x - 1\rvert < 3 \wedge x < 0$	
$\lvert x\rvert > 4 \wedge \lvert x + 1\rvert \leq 2$	
$\lvert x\rvert \leq 2 \wedge \lvert x\rvert > 0$	
$\lvert x - 2\rvert > 3 \wedge \lvert x\rvert < 4$	
$\lvert x\rvert < 1 \wedge \lvert 3 - x\rvert \geq 1$	
$\lvert x + 2\rvert > 4 \wedge \lvert x + 1\rvert < 8$	

34. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas falsas con un ejemplo y las verdaderas, con alguna de las propiedades vistas.

a. $|(-3) \cdot 4| = 3 \cdot 4 = 12$ ☐

b. $|a| > 0$, para todo número real "a". ☐

c. $|a + b| = |a| + |b|$ ☐

d. $|-\sqrt{2}| > |\sqrt{2}|$ ☐

e. $|a| \leq 0$, solo si $a = 0$ ☐

f. $\frac{|2|}{|-3|} = -\frac{3}{2}$ ☐

35. Marquen con una X la expresión que representa a cada conjunto.

a. $(-4; 4) \cup \{5\}$

- $|x| < 4 \vee x = 5$ ☐
- $|x| \leq 4 \vee x = 5$ ☐
- $|x| < 4 \wedge x = 5$ ☐

b. $[-3; -1] \cup [1; 3]$

- $|x| \geq 3 \wedge |x| \leq 1$ ☐
- $|x| \leq 3 \wedge |x| \geq 1$ ☐
- $|x| \geq 3 \wedge |x| \geq 1$ ☐

c. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \cup \{1\}$

- $|x - 1| > 2 \vee x = 1$ ☐
- $|x - 1| < 2 \wedge x = 1$ ☐
- $|x - 1| > 2 \wedge x = 1$ ☐

d. $[2; 4] - \{3\}$

- $|3 - x| \geq 1 \wedge x \neq 3$ ☐
- $|x - 3| < 1 \wedge x \neq 3$ ☐
- $|3 - x| \leq 1 \wedge x \neq 3$ ☐

36. Resuelvan las siguientes ecuaciones e indiquen el conjunto solución.

a. $4 + |2x - 1| - 3 = 6$

b. $5x - |x - 2| = 4$

c. $|-3x + 1| = 3x + 5$

d. $|2x + 1| = x - 2$

e. $3 \cdot |x - 1| + 2 = 5 - x$

f. $5 \cdot |3x - 1| = 6x - 5$

37. Hallen los valores de $t > 0$ para que la ecuación tenga las soluciones indicadas en cada caso.

$3 \cdot |2x - t| + |(-2) \cdot 2| = 4 \cdot |2x - t| - |-4| \cdot 3 + 2t$

a. $S = \{-8; 8\}$

b. $S = \{-2; 6\}$

c. $S = \{4\}$

38. Completen la tabla con la expresión coloquial de cada una de las siguientes expresiones. Luego, resuélvanlas.

Expresión como ecuación/ inecuación	Expresión coloquial
$\sqrt{25} - |3x - 5| \leq 4$	
$|x - 3| + 5 = \frac{1}{4} \cdot 32$	
$3 \cdot |2x + 4| < 6$	

39. Resuelvan las siguientes inecuaciones e indiquen el conjunto solución.

a. $\left|2x - \frac{1}{3}\right| - \frac{2}{3} \geq 1$

b. $2 - |3x + 5| > -|-4|$

c. $4 - 3 \cdot |2 - x| + |3 \cdot (-1)| > -4 \cdot |2 - x| + 10$

d. $|-5| \cdot |2x - 1| + |(-3) + 4| \leq |2x - 1| - 8$

e. $(x - 4)^2 + 9 \leq 25$

f. $3 \cdot |x - 1| + 1 \geq -|5 \cdot (-1)|$

40. Unan el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que la solución de la siguiente inecuación sea la indicada en cada caso.

$$-3 + \left|\frac{1}{2}x + m\right| \leq 2m - 4$$

a. $m = \frac{1}{2}$ • $S = [-4; 0]$

b. $m = 0$ • $S = \{1\}$

c. $m = 1$ • $S = \emptyset$

d. $m = 2$ • $S = [-10; 2]$

5. Radicales. Suma y resta con radicales

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **número radical** es un número irracional que cumple con la propiedad de ser una raíz que no tiene resultado racional.
Los números $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{7}$, son todos ejemplos de números radicales.

Suma y resta de radicales

Dos o más **radicales** son **semejantes** cuando tienen igual índice y radicando.
Por ejemplo, los términos $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ y $\pi\sqrt{5}$ son radicales semejantes, mientras que $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt{3}$ no lo son.

Para poder **sumar o restar dos o más términos con radicales** estos deben ser semejantes.

$$-4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \left(-4 + 3 - \frac{1}{2} + 7\right) = \frac{11}{2}\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{6} - \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \left(-1 + 5 + \frac{3}{2}\right) + \sqrt[3]{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$$

En el caso de que los radicales no parezcan ser semejantes, se deberá extraer factores fuera de la expresión radical y buscar los radicales semejantes.

Extracción de factores fuera de un radical

Para **extraer factores fuera de una expresión radical** es necesario factorizar el radicando hasta su mínima expresión en factores primos, para así aplicar la propiedad distributiva de la radicación.

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 6\sqrt{2}$$

Para recordar pág. 25

Se debe recordar que, cuando las potencias del número que está dentro del signo radical son mayores o iguales al índice de la raíz, es posible extraer factores fuera del signo radical para facilitar los cálculos.

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{3^4 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{3^3}\ \sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{2^3} = 6\sqrt[3]{3}$$

Resuelvan las siguientes sumas y restas con radicales.

a. $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{32} =$

$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2^3} + 5\sqrt{5^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2^5} =$

$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2^2}\sqrt{2} + 5\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2^2}\sqrt{2^2}\sqrt{2} =$

$3\sqrt{2} - 4 \cdot 2\sqrt{2} + 5 \cdot 5\sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} =$

$3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - 12\sqrt{2} =$

$(3 - 8 + 25 - 12)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

b. $3\sqrt{98x^3} + \sqrt{18x^3} - 2\sqrt{8x^3} =$

$3\sqrt{7^2 \cdot 2x^2 x} + \sqrt{3^2 \cdot 2x^2 x} - 2\sqrt{2^3 x^2 x} =$

$3 \cdot 7x\sqrt{2x} + 3x\sqrt{2x} - 2 \cdot 2x\sqrt{2x} =$

$21x\sqrt{2x} + 3x\sqrt{2x} - 4x\sqrt{2x} =$

$(21x + 3x - 4x)\sqrt{2x} = 20x\sqrt{2x}$

Áreas dinámicas [Matemática y Arte]

El **número de oro** es un número irracional representado por la letra griega ϕ, cuyo valor se define mediante radicales: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$

Este número posee muchas propiedades interesantes y fue descubierto en la Antigüedad como una relación o proporción entre dos segmentos de una recta. Esta proporción se encuentra presente en construcciones, obras de arte y también en la naturaleza.

Si ingresan en **puerto.pub/noro*** podrán mirar un video para conocer más acerca del número de oro.

*Enlace acortado de https://youtu.be/Y5doNGWNps8

ACTIVIDADES

5. Radicales. Suma y resta con radicales

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué condición deben cumplir los números naturales **n** y **m** para que se pueda realizar la extracción de factores del radical $\sqrt[n]{a^m}$?

b. ¿Qué valor debe tener **x** para que los radicales $\sqrt{2x}$ y $2\sqrt{3}$ sean semejantes?

c. Los radicales $\sqrt[5]{3}$ y $\sqrt[5]{3^2}$ ¿son semejantes? ¿Y $\sqrt{8}$ y $\sqrt[4]{4}$? ¿Por qué?

42. Resuelvan las siguientes sumas y restas con radicales semejantes.

a. $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} =$ _____

b. $3\sqrt{7} - \sqrt{2} + 4\sqrt{7} - \frac{1}{2}\sqrt{2} =$ _____

c. $-\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - 5\sqrt{a} =$ _____

d. $8\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} =$ _____

43. Rodeen la expresión equivalente a la dada en cada caso.

a. $\sqrt{588} =$

- $49\sqrt{3}$
- $14\sqrt{3}$
- $28\sqrt{3}$

b. $\sqrt{450} =$

- $15\sqrt{2}$
- $45\sqrt{2}$
- $75\sqrt{2}$

c. $\sqrt[3]{135} =$

- $27\sqrt[3]{5}$
- $9\sqrt[3]{5}$
- $3\sqrt[3]{5}$

d. $\sqrt[4]{100} =$

- $2\sqrt[4]{10}$
- $\sqrt{10}$
- $8\sqrt[4]{10}$

44. Resuelvan en sus carpetas las siguientes sumas y restas y escriban los resultados obtenidos.

a. $\sqrt{24} - 3\sqrt{6} + \sqrt{486} =$ _____

b. $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300} - \sqrt{108} =$ _____

c. $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125} =$ _____

d. $\frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98} =$ _____

e. $5\sqrt{44} - 3\sqrt{275} - 6\sqrt{396} - \sqrt{1\,331} =$ _____

f. $12\sqrt[3]{16} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{128} - 7\sqrt[3]{54} =$ _____

g. $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^6} - \sqrt[3]{a^{12}} =$ _____

h. $\sqrt{75a^3b^2} + \sqrt{3ab^4} - \sqrt{12a^3b^2} - \sqrt{27ab^4} =$ _____

45. Completen en los espacios vacíos para que se verifique la igualdad.

a. $-7\sqrt{10} + \boxed{\quad}\sqrt{40} - \frac{1}{2}\sqrt{90} = -\frac{5}{2}\sqrt{10}$

b. $5\sqrt{12} + \boxed{\quad}\sqrt{75} - \sqrt{27} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

46. Planteen y resuelvan las siguientes situaciones. Escriban el resultado exacto y, luego, el aproximado a los centésimos. Comenten con sus compañeros cómo pensaron cada problema.

a. Calculen el perímetro de un triángulo rectángulo de 5 cm² de área, si uno de sus catetos mide el doble que el otro cateto.

b. Calculen el perímetro de un rectángulo sabiendo que uno de sus lados mide 4 cm y su diagonal, $3\sqrt{2}$ cm.

6. Racionalización de denominadores

▶ SABERES DINÁMICOS

Racionalizar una expresión fraccionaria con denominador irracional consiste en hallar una fracción equivalente a la dada, pero con denominador racional.
Para lograr racionalizar la expresión se procede de diferente manera según el tipo de denominador irracional que se presente. Se analizarán **tres casos**:

• **Primer Caso → El denominador es una única raíz cuadrada.**
Se debe amplificar la fracción multiplicando numerador y denominador por la misma raíz del denominador.

Para recordar pág. 25

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{x}$$

• **Segundo Caso → El denominador es una única raíz de índice mayor que dos.**
Se debe amplificar la fracción multiplicando numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador, tal que su radicando tenga los mismos factores, pero con exponentes iguales a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente del radicando original.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{xy^3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{xy^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3y}}{\sqrt[4]{x^3y}} = \frac{2\sqrt[4]{x^3y}}{\sqrt[4]{x^4y^4}} = \frac{2}{xy}\sqrt[4]{x^3y} \qquad con\ x > 0; y > 0$$

• **Tercer Caso → El denominador es una suma o resta de una o dos raíces cuadradas.**
Se debe amplificar la fracción multiplicando numerador y denominador por una suma o resta tal que el producto entre el denominador de la expresión original y la nueva expresión cumpla con una **diferencia de cuadrados**: $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} \rightarrow \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2.(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2.(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2.(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{3.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{3.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \frac{3\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x-y}$$

(con $x > 0 \wedge y > 0$)

ACTIVIDADES

6. Racionalización de denominadores

Test de comprensión

47. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es posible racionalizar la expresión $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$? ¿Qué condiciones debe cumplir "x"?

b. Para racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$, ¿se debe multiplicar por $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$?

c. Para racionalizar la expresión $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$, ¿se debe multiplicar por $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$?

48. **Racionalicen las siguientes fracciones y encuentren su mínima expresión.**

a. $\frac{\pi}{\sqrt{2}} =$ _____

b. $\frac{5}{\sqrt{3}} =$ _____

c. $\frac{4x}{\sqrt{2x}} =$ _____

d. $\frac{5}{2\sqrt[3]{5}} =$ _____

e. $\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} =$ _____

f. $\frac{x}{\sqrt[5]{xy^2z^2}} =$ _____

g. $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} =$ _____

h. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$ _____

i. $\frac{2x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$ _____

j. $\frac{3}{3+\sqrt{6}} =$ _____

49. **Unan cada cálculo con su resultado.**

a. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{4}{\sqrt{5}-1} =$

b. $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{6}+1} =$

c. $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{6}{\sqrt{7}+1} =$

d. $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} =$

- −4
- 2
- 0
- −2

DinámicaMente

Julia dice que puede resolver el siguiente cálculo sin racionalizar, pero Carlos le asegura que no hay otra manera de resolverlo.
¿Quién tiene razón?

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}$$

7. Los números complejos

▶ SABERES DINÁMICOS

La radicación de base negativa e índice par no está definida en ℝ, ya que ningún número real elevado a una potencia par da por resultado un número negativo. Se define entonces, un número que pertenece a un nuevo conjunto, el de los **números complejos** (ℂ), que se simboliza con la letra **i** tal que:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \pm\sqrt{-1}$$

Así, algunas ecuaciones que no tenían resultado en el conjunto de los reales ahora tienen solución compleja, por ejemplo:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \Rightarrow x_1 = 1 + 2i;\ x_2 = 1 - 2i$$

Forma binómica de un número complejo

Un número complejo **z** se puede expresar de **forma binómica** $z = a + bi$, siendo
a la **parte real** [Re(z) = a] y **b** la **parte imaginaria** [Im(z) = b].

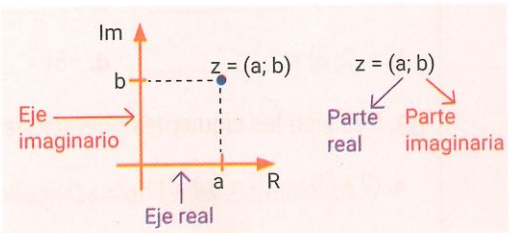
Se puede decir que un **número real** es **un número complejo con parte imaginaria nula**, mientras que un **número imaginario puro** es **un número complejo con parte real nula**.

$z = 3$ es un número real *$z = -5i$ es un número imaginario puro*

Representación y forma cartesiana de un número complejo

Para poder representar un número complejo, primero se debe definir al conjunto $\mathbb{C} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$.

Entonces **a cada número complejo le corresponde un punto en el plano y viceversa**. Por esta razón, **un número complejo $z = a + bi$ se puede representar en el plano cartesiano con el punto (a; b)**. Esta forma de expresar un número complejo **z = (a; b)** es la **forma cartesiana** del complejo **z**.



Adición y sustracción de números complejos

• En forma binómica:
Para **sumar o restar dos números complejos** se suman o restan las partes reales por un lado y las imaginarias por otro.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \qquad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(-4 + 5i) + (3 - 2i) = (-4 + 3) + (5 - 2)i = -1 + 3i \qquad (-2 - 3i) - (5 + 7i) = (-2 - 5) + (-3 - 7)i = -7 - 10i$$

• En forma cartesiana:
Para **sumar o restar dos números complejos** se suman o restan las componentes reales por un lado y las imaginarias por otro.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) \qquad (a; b) - (c; d) = (a - c; b - d)$$

$$(-1; 3) + (2; -5) = (-1 + 2; 3 - 5) = (1; -2) \qquad (4; -3) - (-2; -1) = (4 + 2; -3 + 1) = (6; -2)$$

Para un complejo $z = a + bi$, se definen su **complejo conjugado** $\bar{z}$, tal que $\bar{z}$ tiene su parte real igual y su parte imaginaria opuesta a z: $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$
Se define su **opuesto** $-z$, tal que $-z$ tiene opuestas sus partes real e imaginarias simultáneamente:

$$z = a + bi \Rightarrow -z = -a - bi$$

ACTIVIDADES

7. Los números complejos

Test de comprensión

50. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué tipo de número se obtiene al sumar un complejo y su conjugado? ¿Y al restarlos?

b. Un mismo número en el plano cartesiano, ¿puede representar a más de un número complejo?

c. ¿El conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los complejos? ¿Y al revés?

51. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

z	$Re(z)$	$Im(z)$	$-z$	$\bar{z}$
$2 + 3i$				
				$3 + i$
	2	$\sqrt{2}$		
7				
				$2i$
			$-5 + 2i$	

52. Completen con la expresión binómica o cartesiana de los siguientes números complejos según corresponda.

a. $5 - 2i =$ _____ **c.** $6 =$ _____ **e.** $(-3; 0) =$ _____ **g.** $(-\sqrt{2}; 5) =$ _____

b. $(-2; 3) =$ _____ **d.** $-3i =$ _____ **f.** $(0; 4) =$ _____ **h.** $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i =$ _____

53. Realicen las siguientes operaciones en forma binómica.

a. $(2 + 2i) - (5 - i) + 3i =$ _____ **d.** $-4i + (6 - 3i) + (9 + 7i) =$ _____

b. $(-7 + 5i) + (-7 - 5i) + 4i =$ _____ **e.** $(1 - i) + (-3 + 4i) - (-2 - 5i) =$ _____

c. $(-4 + 3i) - \left(-\frac{1}{2} + i\right) + \left(3 - \frac{1}{2}i\right) =$ _____ **f.** $\left(\frac{3}{5} + i\right) - (-3 - 4i) + \left(\frac{7}{5} + 3i\right) =$ _____

54. Realicen las siguientes operaciones en forma cartesiana.

a. $(3; 4) + (-1; -2) - (0; 4) =$ _____ **c.** $\left(4; \frac{1}{2}\right) - \left(3; \frac{5}{2}\right) + (-1; 3) =$ _____

b. $-(2; 0) + (-3; -1) + (5; 1) =$ _____ **d.** $\left(5; \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}; 1\right) + \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) =$ _____

55. Encuentren los valores de "x" e "y" según corresponda para que se verifique la igualdad, sabiendo que dos complejos son iguales cuando lo son sus partes reales e imaginarias respectivamente.

a. $3 + xi = y - 5i$ _____ **c.** $2x - 4i = 4 + (x - y)i$ _____

b. $(x + y) - i = 2 + (x - y)i$ _____ **d.** $x^2 + yi = 9 - 3xi$ _____

Integración final

56. Resuelvan los siguientes cálculos.

a. $5\sqrt{3} + 4\sqrt{48} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{27} =$

b. $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - 2\sqrt{450} =$

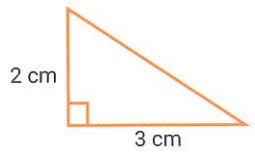
c. $\sqrt[3]{3x^3} + \sqrt[3]{24y^3} - \sqrt[3]{81z^6} =$

d. $\sqrt{50a} - \sqrt{18a} + \sqrt{98a} - \sqrt{200a} =$

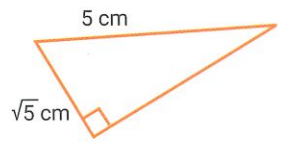
e. $-5\sqrt{6} + \sqrt{600} - 2\sqrt{54} + \sqrt{294} =$

57. Calculen el valor exacto del perímetro de las siguientes figuras.

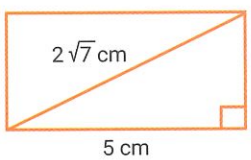
a. Triángulo rectángulo.



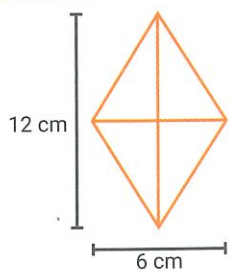
b. Triángulo rectángulo.



c. Rectángulo.



d. Rombo.



58. Completen las expresiones para que se verifique la igualdad en cada caso.

a. $3\sqrt{2} - 4\sqrt{20} + \square\sqrt{45} + 3\sqrt{\square} = 9\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

b. $2\sqrt{28} + 3\sqrt{75} - 2\sqrt{\square} - \square\sqrt{243} = -6\sqrt{7} - 21\sqrt{3}$

c. $\dfrac{4\sqrt{54}}{\square\sqrt{6}} = 1$

59. Rodeen la expresión que sirve para racionalizar en cada caso.

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$ • $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ • $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ • $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} =$ • $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ • $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ • $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$

c. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} =$ • $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ • $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ • $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$

d. $= \dfrac{2}{\sqrt[5]{27a^2b}}$ • $\dfrac{\sqrt[5]{27a^2b}}{\sqrt[5]{27a^2b}}$ • $\dfrac{\sqrt[5]{9a^3b^4}}{\sqrt[5]{9a^3b^4}}$ • $\dfrac{\sqrt[5]{9a^2b}}{\sqrt[5]{9a^2b}}$

60. Unan con flechas cada expresión con su resultado.

a. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	• $2\sqrt{x}$
b. $\dfrac{4x}{\sqrt{2x}}$	• $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$
c. $\dfrac{2x}{\sqrt{x}}$	• $4\sqrt{x}$
d. $\dfrac{4x}{\sqrt{x}}$	• $2\sqrt{2x}$

61. Racionalicen las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} =$

b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}+5} =$

c. $\dfrac{4}{-1+\sqrt{2}} =$

d. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}} =$

62. Resuelvan hasta reducir a la mínima expresión.

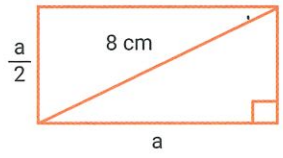
a. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{\sqrt{243}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{27}} =$

b. $\dfrac{4}{\sqrt{32}} - \dfrac{7}{\sqrt{8}+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{128}} =$

c. $\dfrac{7}{\sqrt{7}} - \dfrac{27}{\sqrt{28}+1} + \sqrt{252} - \dfrac{9}{3-\sqrt{63}} =$

d. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - \dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{20}} + \dfrac{10}{3-\sqrt{45}} + \dfrac{100}{\sqrt{500}} =$

63. Encuentren el valor de "a" y el perímetro del siguiente rectángulo.



64. Tengan en cuenta los datos y encuentren el valor de las siguientes expresiones.

$a > 0; b > 0; a - b = 12; \sqrt{a} - \sqrt{b} = 4$

a. $2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) =$ b. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$

65. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 9 = 0$

b. $x^2 + x + 2 = 0$

c. $(x - 1)^3 + 3 = 0$

d. $2x^2 + x + 4 = (x + 1)^2 + 2$

66. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen y den un ejemplo correcto en cada caso.

a. La suma entre un número complejo y su conjugado es un número imaginario puro. ☐

b. La suma entre un número complejo y su opuesto es un número real. ☐

c. La diferencia entre un número imaginario puro y un número real es un número complejo. ☐

d. La diferencia entre un número complejo y su conjugado es un número real. ☐

67. Hallen el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos.

a. $-2 + i =$

b. $(-1; -\sqrt{2}) =$

c. $5 - \sqrt{3}i =$

d. $(0; 4) =$

68. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

z	$Re(z)$	$Im(z)$	$\bar{z}$	Forma cartesiana
			$2 - \sqrt{2}i$	
	$\sqrt{3}$	-1		
$3 - 4i$				
$-1 - 5i$				

69. Resuelvan las sumas y restas en forma binómica. Expresen el resultado en forma cartesiana.

a. $-(3 + 5i) + (4 + 3i) =$

b. $-(2 + 4i) - (3 - 2i) + 5i =$

c. $(-2 + 6i) + (4 - 2i) - (-1 + 4i) =$

d. $(-\sqrt{3} + i) - (\sqrt{27} - 3i) + \left(\frac{3}{\sqrt{3}} - 2i\right) =$

70. Resuelvan las sumas y restas en forma cartesiana. Expresen el resultado en forma binómica.

a. $(2; 3) - (3; -4) =$

b. $(1; 0) - (0; -1) + (2; -3) - (4; -5) =$

c. $(4; -2) - \left(\frac{1}{2}; 4\right) + \left(\frac{3}{2}; 1\right) - (5; 0) =$

d. $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right) - (4; \sqrt{8}) + \left(\frac{5}{2}; -\sqrt{32}\right) =$

71. Completen con el número complejo adecuado para que se verifique la igualdad en cada caso.

a. $(2 + 3i) + (\quad) = -1 - 2i$

b. $(\quad) + (1 - \sqrt{8}i) = -3 + \sqrt{2}i$

c. $-(\quad) + (5 + \sqrt{20}i) = 3 + 3\sqrt{5}i$

d. $(1 - \sqrt{27}i) - (\quad) = -3 - 5\sqrt{3}i$

72. Encuentren los valores de "x" e "y" según corresponda para que se verifique la igualdad.

a. $(2x - 1; 3) = (4; y + 1)$

b. $(2 - x) + yi = 2y + (x + 1)i$

c. $5 - 3xi + 2y + yi = x + 1 - i$

d. $x + (y + 5)i + xi + 2y + i = 3 - 2xi$

e. $(2; x + 1) - (y; 0) = (x - 1; 3y)$

Para recordar

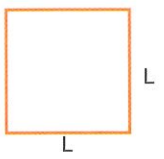
Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Propiedades de la radicación

Propiedad	Simbólicamente	Ejemplo
Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left(2a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{2}$
Distributiva respecto de la multiplicación	$\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{2.5} = (2.5)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} . 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} . \sqrt[4]{5}$
Distributiva respecto de la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \Leftrightarrow b \neq 0$	$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{2^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$
Simplificación de índices	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$ $\Leftrightarrow p \neq 0 \wedge a > 0$	$\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt{5}$ $\sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[3]{2}$
Eliminación del índice	Si "n" es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ Si "n" es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[5]{7^5} = 7$ $\sqrt[6]{(-3)^6} = \lvert -3 \rvert = 3$
Amplificación de índices	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.r}{n.r}} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$ $\Leftrightarrow r \neq 0 \wedge a > 0$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3.2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$ $\sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7.2]{2^{3.2}} = \sqrt[14]{64}$

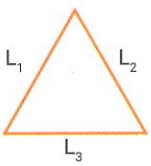
Perímetros de algunas figuras

Cuadrado



$P = 4 . L$

Triángulo

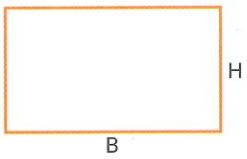


$P = L_1 + L_2 + L_3$

Rombo

$P = 4 . L$

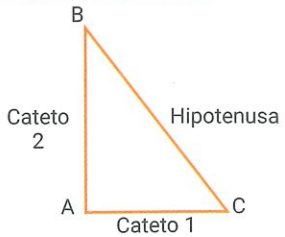
Rectángulo



$P = 2 . B + 2 . H$

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo se cumple que **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**



Teorema de Pitágoras

Hipotenusa² = (cateto 1)² + (cateto 2)²

$\overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{ab}^2$

$\hat{a}bc$ rectángulo en $\hat{a}$

1 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

73. ¿Cuál es la única opción correcta, sabiendo que "$a \in \mathbb{I} \wedge b \in \mathbb{I}$"?

- ◯ (a + b) siempre es un número irracional.
- ◯ (a + b) es un número irracional solo si $a \neq b$.
- ◯ (a + b) es un número racional cuando $a = -b$.
- ◯ Ninguna de las anteriores.

74. ¿Cuál es el intervalo correspondiente al siguiente conjunto?

$$A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge (-1 \leq x < 3) \vee (2 < x \leq 4)\}$$

◯ $[-1; 4]$ ◯ $\emptyset$ ◯ $(2; 3)$ ◯ Ninguna de las anteriores.

75. ¿Qué expresión representa al conjunto de números reales, tal que el módulo de la suma entre el doble de un número real y el inverso de un tercio es igual a tres?

◯ $|2x - 3| = 3$ ◯ $|2x + 3| = 3$ ◯ $\left|2x - \frac{1}{3}\right| = 3$ ◯ Ninguna de las anteriores.

76. ¿Cuál es el conjunto solución de la siguiente inecuación?

$$2.|2 - 3x| + 5 \leq 4 + 3.|2 - 3x|$$

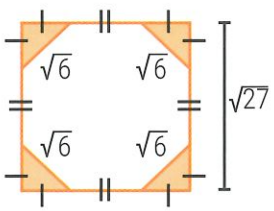
◯ $S = \emptyset$ ◯ $S = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ ◯ $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$ ◯ Ninguna de las anteriores.

77. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión?

$$\frac{6}{\sqrt{12}} - \frac{3}{\sqrt{3}+2} - 5\sqrt{27} + \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{108} - \sqrt{48}} =$$

◯ $-\frac{7}{2} + 11\sqrt{3}$ ◯ $-\frac{7}{2} - 11\sqrt{3}$ ◯ $\frac{7}{2} + 11\sqrt{3}$ ◯ Ninguna de las anteriores.

78. ¿Cuál es el perímetro del octógono que resulta de quitar las partes sombreadas al cuadrado de la figura donde las longitudes se expresan en cm?



◯ $P = 4.(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ cm ◯ $P = 8\sqrt{6}$ cm

◯ $P = (4\sqrt{27} - 4\sqrt{6})$ cm ◯ Ninguna de las anteriores.

79. ¿Qué valores de "x" e "y" verifican la igualdad?

$$(x + y) + 2xi = (3 - y)i - 2$$

◯ $x = 5; y = -7$ ◯ $x = 7; y = 5$ ◯ No existen. ◯ Ninguna de las anteriores.

2 Cónicas

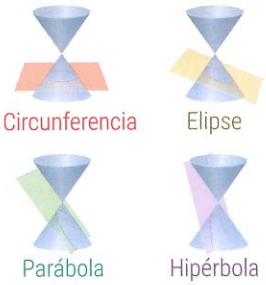
8. Circunferencia

▶ SABERES DINÁMICOS

Cónicas

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición geométrica.

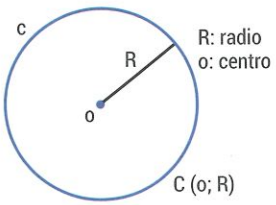
Una **cónica** es el **lugar geométrico** que se obtiene cuando se interseca una superficie cónica con un plano. Según la inclinación del plano, la cónica que se genera puede ser: **circunferencia**, **elipse**, **parábola** o **hipérbola**.



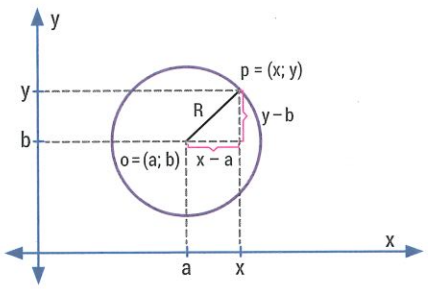
Circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia fija llamada radio.

Los elementos para poder obtener una circunferencia son su **centro** (o) y su **radio** (R).



Para poder escribir la **ecuación canónica de la circunferencia** con **centro** en **o = (a; b)** y **radio R** se la ubica en un sistema de ejes coordenados cartesianos.



- Aplicando la definición de circunferencia, la distancia entre el centro **o** y el punto **p** perteneciente a la circunferencia, por el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ **Ecuación canónica de la circunferencia**

- Si el centro se ubica en el origen de coordenadas: $x^2 + y^2 = R^2$

A partir de la ecuación canónica se puede obtener la **ecuación general de la circunferencia**.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

A = $-2a$, B = $-2b$, C = $a^2 + b^2 - R^2$

Para recordar pág. 37

$x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$ **Ecuación general de la circunferencia**

Determinen la ecuación canónica de la circunferencia que:

a. *Tiene centro en el punto (4; −2) y radio 3.*

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$

b. *Tiene por ecuación general a $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$.*

Se completan cuadrados: $x^2 + 10x + 25 - 25 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 13 = 0 \Rightarrow$

$$(x + 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 13 = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

ACTIVIDADES

8. Circunferencia

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. El centro de la circunferencia $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, ¿es el punto (1; 2)?

b. El centro de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ ¿es un punto perteneciente al eje x?

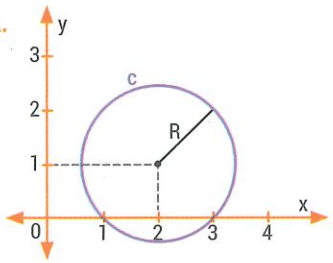
c. ¿Es cierto que el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ es R = 2?

2. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

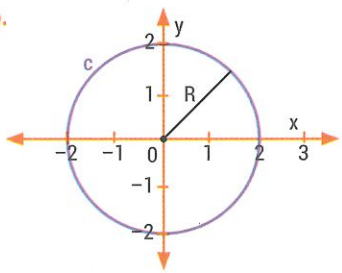
Ecuación canónica	Ecuación general	Centro	Radio
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$			
		$(-3; 0)$	2
	$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$		
		$\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{2}$

3. Escriban la ecuación canónica de cada una de las siguientes circunferencias.

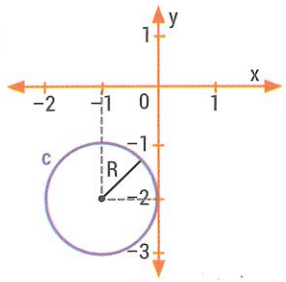
a.



b.



c.



4. Escriban la ecuación general y la canónica de la circunferencia que cumple con las condiciones pedidas en cada caso; luego, realicen el gráfico en sus carpetas.

a. Tiene centro en el punto (3; 0) y pasa por el punto (1; 2).

Ecuación canónica: _____ Ecuación general: _____

b. Su centro es el punto medio del segmento que une los puntos (−3; 3) y (1; 3), pertenecientes a ella.

Ecuación canónica: _____ Ecuación general: _____

c. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan una distancia $\sqrt{3}$ del punto (0; −2).

Ecuación canónica: _____ Ecuación general: _____

5. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - A = 0$, planteen y resuelvan lo pedido en cada caso. Grafiquen cada una de las situaciones en sus carpetas.

a. Hallen el valor del número real A para que el radio de la circunferencia sea 5. _____

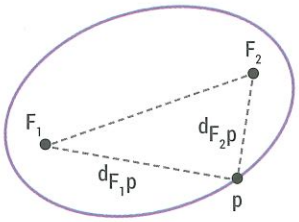
b. Si A = 0, el punto (1; 2) ¿es interior o exterior a la circunferencia? _____

c. ¿Cuál es el radio de la circunferencia, si A = 7? _____

9. Elipse

▶ SABERES DINÁMICOS

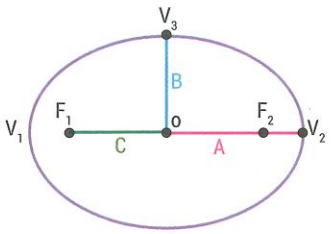
La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** se mantiene **constante** (**k**).



$\overline{F_1p} + \overline{F_2p} = k$

Elementos de la elipse

- Centro → o
- Focos → F_1, F_2
- Vértices → V_1, V_2, V_3, V_4
- Distancia focal → $\overline{F_1F_2} = 2C$
- Diámetro mayor → $\overline{V_1V_2} = 2A$
- Diámetro menor → $\overline{V_3V_4} = 2B$

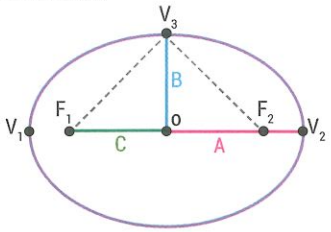


Relación entre A, B y C:

- Si se considera el punto V_2, por pertenecer a la elipse cumple con la afirmación:

$$\overline{V_2F_1} + \overline{V_2F_2} = k$$

$$(A + C) + (A - C) = k \Rightarrow \mathbf{2A = k}$$



- Entonces: $\left.\begin{array}{l}\overline{V_3F_1} + \overline{V_3F_2} = 2A \\ \text{pero } \overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2} = A$

- Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo V_3oF_1 se cumple: $A^2 = B^2 + C^2$

Excentricidad

La **excentricidad** (**e**) es un parámetro que permite clasificar a las cónicas. Se define como el cociente entre C y A.

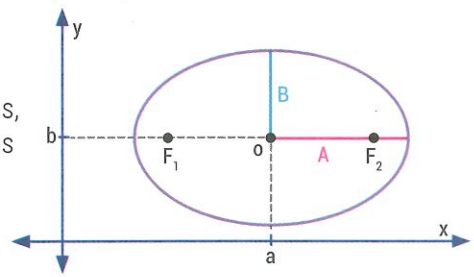
$$e = \frac{C}{A}$$

Como en la **elipse** se cumple que $C < A \Rightarrow 0 < e < 1$, en cambio en la **circunferencia** e = 0. Geométricamente, cuanto mayor es la distancia entre los focos, mayor es la excentricidad, y la elipse se ve menos ovalada.

Ecuación de la elipse

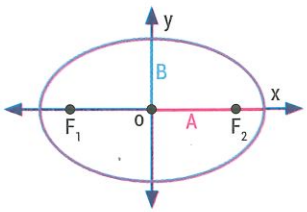
Si se representa la elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, para poder escribir su ecuación es necesario conocer su centro y las medidas de los diámetros.

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$

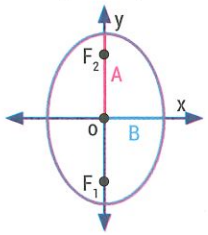


Ecuación canónica de la elipse con centro en o = (a; b).

Si el centro de la elipse es el origen de coordenadas, su disposición depende de la ubicación del diámetro mayor:



$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

Debe notarse que la ubicación de los focos siempre es sobre el diámetro mayor de la elipse.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/elip* para ver una representación interactiva de una elipse y ampliar los conocimientos sobre este tema.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/nchasgs2

ACTIVIDADES

9. Elipse

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué sucede si las medidas de los diámetros de una elipse coinciden?

b. Si una cónica tiene excentricidad mayor que 1, ¿se trata de una elipse?

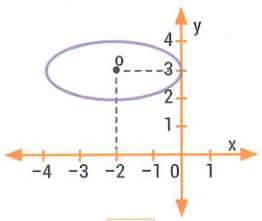
c. Los focos de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ¿se encuentran ubicados sobre el eje x?

7. Completen la tabla con lo pedido.

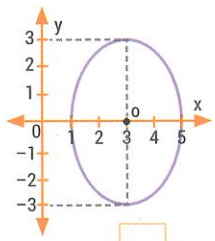
Ecuación	Centro	A	B	Excentricidad
$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$				
$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$				
$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$				
$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y+4)^2}{10} = 1$				

8. Escriban en cada elipse la letra de la ecuación que le corresponde.

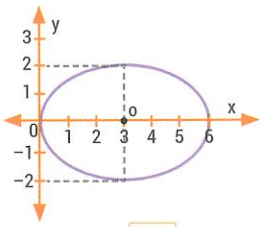
a. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



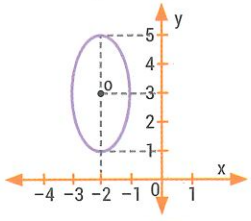
b. $(x+2)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$



c. $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$



d. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



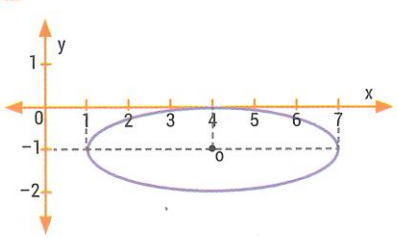
9. Determinen la ecuación de la elipse que cumpla con las condiciones dadas en cada caso. Luego, grafiquen cada ecuación en sus carpetas.

a. Tiene sus vértices ubicados en los puntos (−1; 2), (5; 2), (2; 0) y (2; 4). _____

b. Tiene sus focos ubicados en los puntos (−1; 1) y (−1; 5), y su excentricidad vale $\frac{2}{3}$. _____

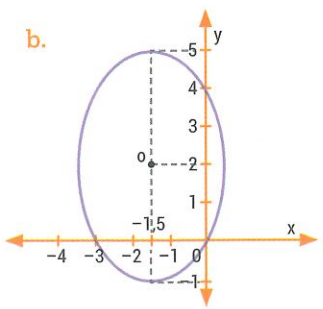
10. Observen los gráficos y escriban la ecuación de la elipse correspondiente a cada uno.

a.



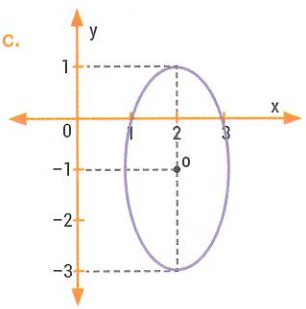
_____

b.



_____

c.



_____

10. Parábola

▶ SABERES DINÁMICOS

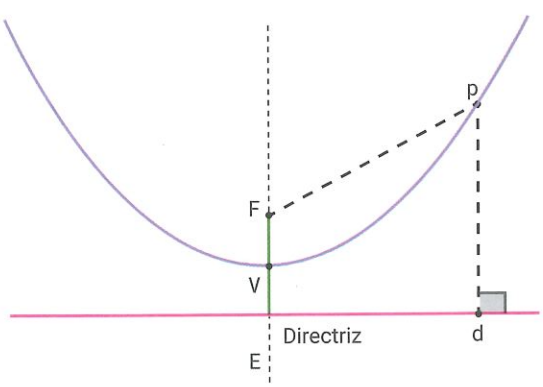
La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**.

$\overline{Fp} = \overline{pd}$

Para recordar pág. 37

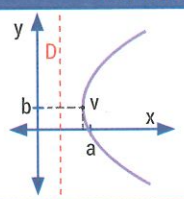
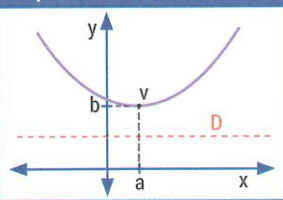
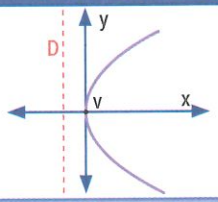
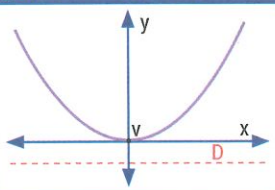
Elementos de la parábola

- Foco → F
- Vértice → V
- Eje de simetría → E
- Directriz → D
- Distancia del foco a la directriz → P

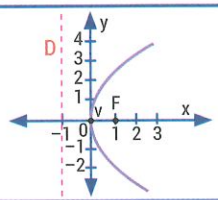
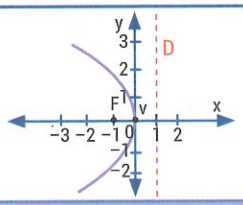
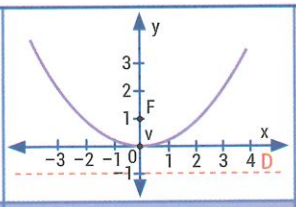
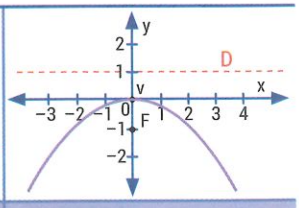


Ecuación de la parábola

Para poder expresar la **ecuación de la parábola** es necesario conocer la distancia entre el foco y la directriz (P) y las coordenadas del vértice. Si se ubica a la parábola en un sistema de coordenadas cartesianas:

• Si el vértice es el punto (a; b)		• Si el vértice es el origen de coordenadas	
			
$x - a = \frac{1}{2P} \cdot (y - b)^2$	$y - b = \frac{1}{2P} \cdot (x - a)^2$	$x = \frac{1}{2P} \cdot y^2$	$y = \frac{1}{2P} \cdot x^2$

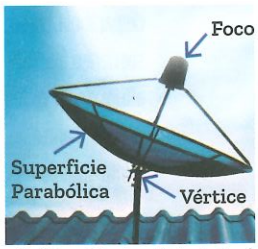
La disposición de la parábola dependerá del signo del coeficiente de la parte cuadrática.

			
$x = \frac{1}{4} y^2$	$x = -\frac{1}{4} y^2$	$y = \frac{1}{4} x^2$	$y = -\frac{1}{4} x^2$

Áreas dinámicas [Matemática y Tecnología]

Antenas parabólicas

La parábola se puede definir como una curva que surge al hacer un corte a un cono. Si esta definición se aplicara a un objeto tridimensional, obtendríamos una superficie denominada paraboloide. Un paraboloide con un receptor de señal en el foco puede conseguir que todas las señales que reboten en el paraboloide sean enviadas al receptor, sin apuntar directamente al mismo.



Suelo (P unidades del vértice)

ACTIVIDADES

10. Parábola

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen las respuestas.

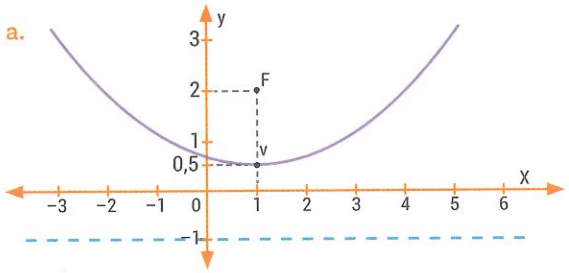
a. Si la distancia entre el foco y la directriz es 4, ¿cuál es la distancia entre el foco y el vértice?

b. Si el vértice de una parábola es el punto (0; 0) y la variable lineal es x, ¿su foco está sobre el eje y?

c. ¿Es correcto afirmar que el vértice de la parábola $(y + 1) = 2 . (x - 3)^2$ es el punto (1; −3)?

12. **Indiquen para cada una de las siguientes parábolas su ecuación, vértice, foco y directriz.**

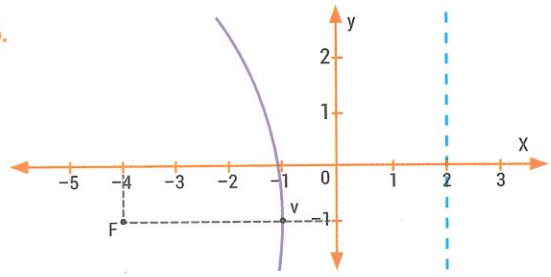
a.



Ecuación: _____

Vértice: _____ Foco: _____ Directriz: _____

b.



Ecuación: _____

Vértice: _____ Foco: _____ Directriz: _____

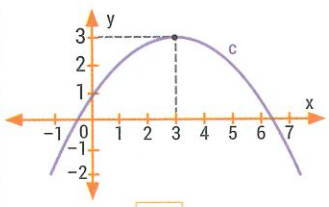
13. **Escriban la ecuación canónica de la parábola que cumple con las condiciones dadas en cada caso. Luego, realicen el gráfico de cada una en sus carpetas.**

a. Tiene vértice en el punto (3; −3), pasa por el punto (1; −4) y su eje es la recta x = 3. _____

b. Su foco es el punto (−3; 1) y su directriz es la recta x = −2. _____

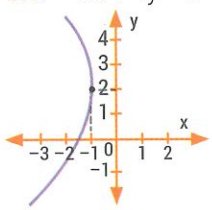
14. **Escriban en cada parábola la letra de la ecuación que le corresponde.**

a. $y^2 - 4x = -4$



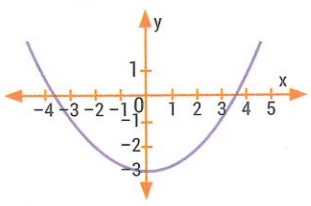
☐

b. $x^2 - 6x + 4y = 3$



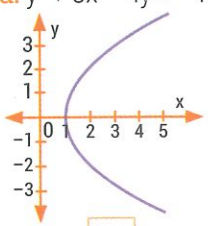
☐

c. $x^2 - 4y = 12$



☐

d. $y^2 + 8x - 4y = -12$



☐

DinámicaMente

Reúnanse con un compañero, planteen el problema y respondan.

Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma de parábola, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen los cables están separadas por 100 m y tienen una altura de 25 m. Los cables tocan la ruta en la mitad de la distancia entre las torres. ¿Cuál es la altura del cable en un punto situado a 20 m desde el punto medio?

_____

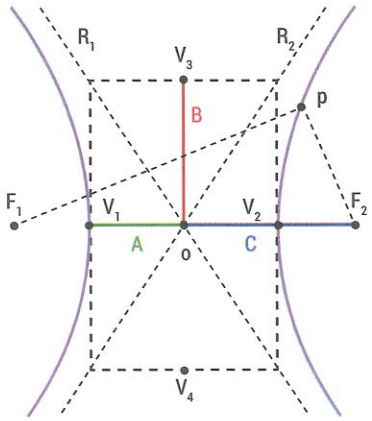
11. Hipérbola

▶ SABERES DINÁMICOS

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos se mantiene constante.

Distancia entre p y $F_1 \rightarrow \overline{pF_1}$
Distancia entre p y $F_2 \rightarrow \overline{pF_2}$

$|\overline{pF_1} - \overline{pF_2}| = k$ **k es la constante**



Elementos principales de la hipérbola

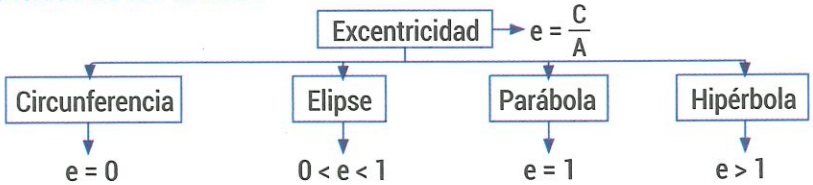
- **Centro → o**
- **Focos → F_1, F_2**
- **Distancia focal → $\overline{F_1F_2} = 2C$**
- **Vértices reales → V_1, V_2**
- **Vértices imaginarios → V_3, V_4**
- **Eje real → $\overline{V_1V_2} = 2A$**
- **Eje imaginario → $\overline{V_3V_4} = 2B$**
- **Asíntotas → Rectas R_1 y R_2**

Las asíntotas enmarcan el gráfico de la hipérbola, lo limitan, acercándose tanto como puedan sin tocarlo. Las asíntotas se cortan en el centro **o** de la hipérbola.

Relación entre A, B y C

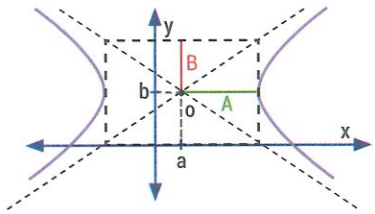
En la hipérbola se cumple que $C^2 = A^2 + B^2$. Como en la hipérbola $C > A \Rightarrow e = \frac{C}{A} > 1$

Excentricidad de las cónicas



Ecuación de la hipérbola

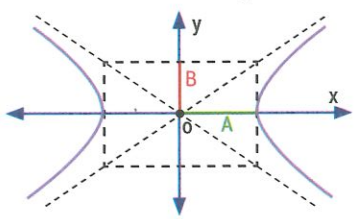
Para encontrar la **ecuación de una hipérbola** es necesario conocer las coordenadas de su centro y los valores de los ejes reales e imaginarios (A y B).



Si el centro se ubica en (a; b) y el eje real es paralelo al eje x, la ecuación es:

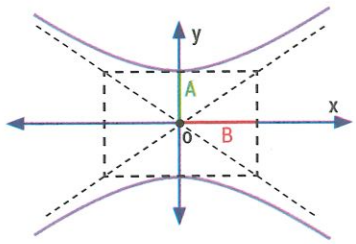
$$\frac{(x-a)^2}{A^2} - \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$

Si el centro es el origen de coordenadas:



$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Eje real → eje x



$$-\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

Eje real → eje y

ACTIVIDADES

11. Hipérbola

Test de comprensión

15. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si las asíntotas de una hipérbola son $y = -x$ e $y = x - 2$, ¿su centro es el punto $(1; -1)$?

b. En la hipérbola de ecuación $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, ¿$A = 2$?

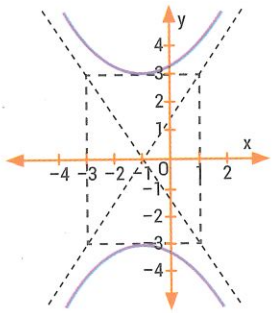
c. Si una cónica tiene excentricidad menor que 1, ¿puede ser una hipérbola? ¿Por qué?

16. Completen la tabla con lo pedido en cada caso. Luego, realicen el gráfico en sus carpetas.

Ecuación	Centro	A	B	Asíntotas
$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$				
$-\frac{x^2}{9} + (y-1)^2 = 1$				

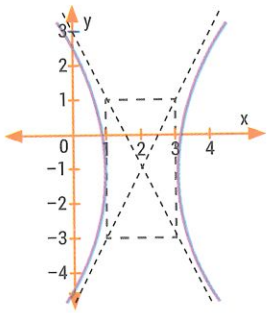
17. Escriban la ecuación y la excentricidad de cada una de las siguientes hipérbolas.

a.



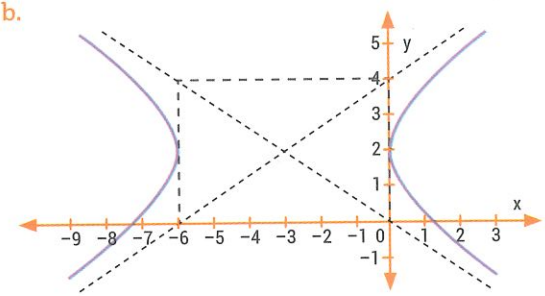
Ecuación: _____ Excentricidad: _____

c.



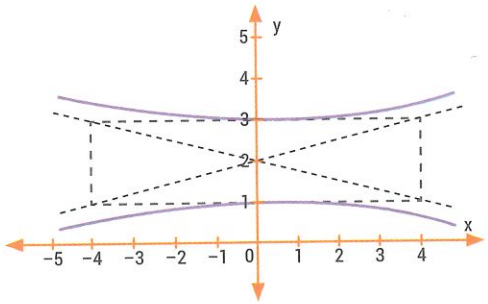
Ecuación: _____ Excentricidad: _____

b.



Ecuación: _____ Excentricidad: _____

d.



Ecuación: _____ Excentricidad: _____

18. Encuentren las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las condiciones pedidas en cada caso. Luego, realicen el gráfico correspondiente a cada una en sus carpetas.

a. Tiene focos en los puntos $(5; 0)$ y $(-5; 0)$ y sus vértices reales en los puntos $(3; 0)$ y $(-3; 0)$.

_____

b. Tiene sus vértices reales en los puntos $(1; 0)$ y $(-1; 0)$, y sus asíntotas son las rectas $y = 5x$ e $y = -5x$.

_____

Integración final

19. Grafiquen las siguientes circunferencias y escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Luego, corrijan los casos falsos.

C_1: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ C_2: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

a. El centro de la circunferencia C_1 está ubicado en el punto (1; 2). ☐

b. El radio de la circunferencia C_2 es $R = 2\sqrt{2}$. ☐

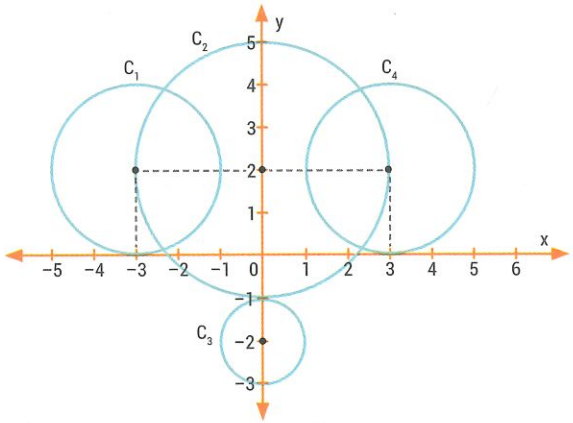
c. Las circunferencias se intersecan en dos puntos. ☐

d. El punto (−1; 0) pertenece a ambas circunferencias. ☐

20. Completen la tabla con lo pedido en cada caso. Luego, grafiquen las circunferencias.

Ecuación	Centro	Radio
	(4; 2)	4
$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$		
	(−1; 6)	$\sqrt{7}$
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$		

21. Escriban las ecuaciones canónicas de cada una de las siguientes circunferencias.



C_1: C_3:

C_2: C_4:

22. Indiquen los valores de A para que la ecuación C: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = A$ represente una circunferencia que cumpla lo pedido en cada caso. Realicen los gráficos para los valores indicados.

a. La circunferencia tiene radio 5.

b. Los puntos pertenecientes a C se encuentran a una distancia 3 del punto (2; −3).

c. El punto de coordenadas (1; −2) pertenece a la circunferencia C.

23. Marquen la ecuación que represente lo pedido en cada caso.

a. Una elipse con centro en el punto (−1; 4), diámetro mayor 8 y diámetro menor 6.

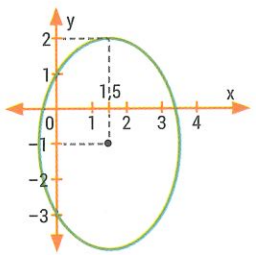
- $\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 4)^2}{9} = 1$ ☐
- $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 4)^2}{3} = 1$ ☐
- $\frac{(x + 1)^2}{16} + \frac{(y - 4)^2}{9} = 1$ ☐

b. Una elipse con centro en el origen de coordenadas y vértices en los puntos (2; 0) y (0; 3).

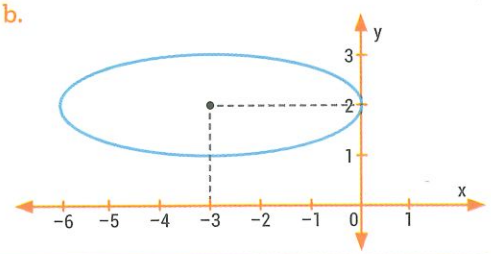
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ☐
- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ☐
- $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ☐

24. Escriban las ecuaciones de las siguientes elipses e indiquen su excentricidad.

a.



b.



25. Encuentren el centro, la excentricidad, los diámetros mayor y menor, y los focos de cada elipse.

a. $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ b. $\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

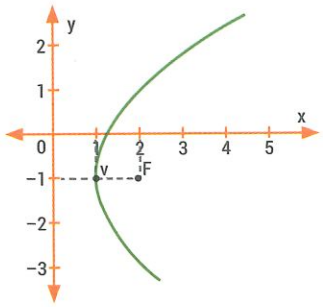
26. Escriban las ecuaciones de las parábolas que cumplan con lo pedido en cada caso. Luego, grafíquenlas.

a. Tiene vértice en el origen de coordenadas, foco en el punto $(-3; 0)$ y su directriz es $x = 3$.

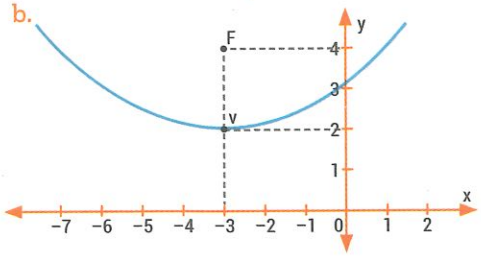
b. Tiene vértice en el punto $(-1; 2)$ y su foco en el punto $(1; 2)$.

27. Escriban las ecuaciones canónicas de las parábolas.

a.



b.



28. Tengan en cuenta las ecuaciones de las parábolas y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Luego, corrijan las falsas.

$P_1: (x-4)^2 = 4y$ $P_2: (y-2)^2 = -4.(x-1)$

a. P_1 tiene vértice en el punto $(4; 1)$. ☐

b. P_2 tiene como directriz la recta $x = 2$. ☐

c. Ambas parábolas pasan por $(0; 4)$. ☐

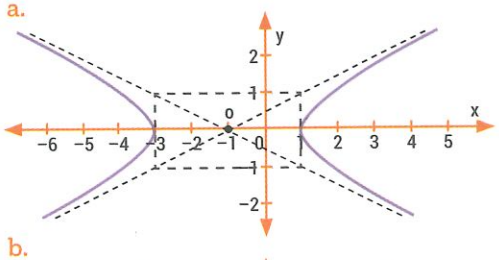
d. El foco de P_2 se ubica en el punto $(1; 2)$. ☐

29. Encuentren los vértices, los focos y las asíntotas de las siguientes hipérbolas. Luego, grafíquenlas.

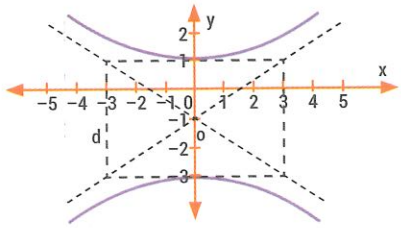
a. $9x^2 - 4y^2 = 36$ b. $-\frac{(x-1)^2}{16} + (y+2)^2 = 1$

30. Escriban las ecuaciones canónicas de las siguientes hipérbolas.

a.



b.



31. Escriban la ecuación de la hipérbola que cumple con las condiciones en cada caso.

a. Sus asíntotas son las rectas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, uno de sus vértices reales se ubica en el punto $(2; 0)$.

b. Sus focos están ubicados en los puntos $(0; 1)$ y $(0; -1)$, la longitud del eje real es 1.

32. Indiquen qué tipo de cónica representa cada ecuación. Luego, grafíquenlas.

a. $(x+1)^2 = 4 - y^2$

b. $2.(x-2) = -y^2$

c. $4.(x-3)^2 - 100 = 25.(y+1)^2$

d. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

33. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Luego, corrijan las falsas.

a. Si una cónica tiene excentricidad mayor que 1, entonces se trata de una elipse. ☐

b. El eje de una parábola es el correspondiente a la variable cuadrática. ☐

c. En una hipérbola la distancia entre los focos es mayor a la longitud del eje real. ☐

d. La distancia entre el foco y la directriz en una parábola es el doble que la distancia del foco al vértice. ☐

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Cuadrado de un binomio

El desarrollo del **cuadrado de un binomio** da como resultado un trinomio cuadrado perfecto.

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 \qquad (x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

En el caso de que la expresión cuadrática no sea un trinomio cuadrado perfecto, se deberá **completar cuadrados**, por ejemplo:

$$x^2 + 4x - 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 + 4 - 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5 - 4 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 - 5 \Rightarrow (x + 2)^2 - 9$$

Es decir, es posible reescribir una expresión cuadrática de la forma

$$x^2 + bx + c$$

que no es un trinomio cuadrado perfecto como:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

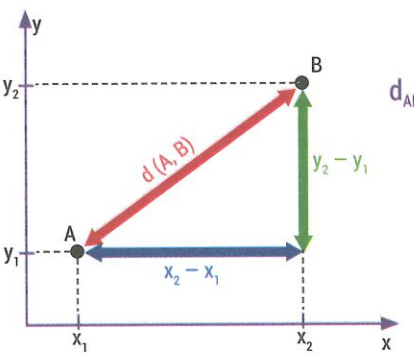
Ejemplos:

a. $x^2 - 10x + 3 = \left(x - \frac{10}{2}\right)^2 - \frac{100}{4} + 3 \Rightarrow x^2 - 10x + 3 = (x - 5)^2 - 25 + 3 = (x - 5)^2 - 22$

b. $x^2 + 6x - 4 = \left(x + \frac{6}{2}\right)^2 - \frac{36}{4} - 4 \Rightarrow x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 - 9 - 4 = (x + 3)^2 - 13$

Distancia entre dos puntos

Para encontrar la **distancia entre dos puntos** $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$ se debe aplicar el teorema de Pitágoras y la expresión es:



$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

34. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

a. ¿Cuál es su ecuación canónica?

- ◯ $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 12$
- ◯ $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 12$
- ◯ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Cuál es su radio?

- ◯ 12
- ◯ $\sqrt{12}$
- ◯ 5
- ◯ 25

35. Dada la ecuación $4 . (x + 3)^2 = 20 + 5 . (y - 2)^2$.

a. ¿Qué tipo de cónica representa?

- ◯ Circunferencia.
- ◯ Elipse.
- ◯ Hipérbola.
- ◯ Ninguna de las anteriores.

b. ¿Cuál es el valor de su excentricidad?

- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ $\frac{3}{5}\sqrt{5}$
- ◯ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

36. ¿Cuál es la ecuación de la parábola cuyo foco es $(1; -0{,}5)$ y su directriz, $y = 0{,}5$?

- ◯ $(x - 1)^2 = -2y$
- ◯ $(y - 1)^2 = 2x$
- ◯ $(x - 1)^2 = 2y$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

37. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene un foco en $(7; 2)$, el centro en $(4; 2)$ y un vértice en $(9; 2)$?

- ◯ $\frac{(x + 4)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$
- ◯ $\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$
- ◯ $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$
- ◯ Ninguna de las anteriores.

38. Respondan.

a. ¿Cuál es la cónica cuya excentricidad es igual a 1?

- ◯ Circunferencia.
- ◯ Elipse.
- ◯ Parábola.
- ◯ Hipérbola.

b. En una elipse, ¿cómo se relacionan A, B y C?

- ◯ $A^2 - B^2 = C^2$
- ◯ $A^2 + B^2 = C^2$
- ◯ $C^2 - B^2 = A^2$
- ◯ $A^2 + C^2 = B^2$

c. ¿En qué punto se cortan las asíntotas de una hipérbola?

- ◯ En un vértice.
- ◯ En el centro.
- ◯ En un foco.
- ◯ Ninguna de las anteriores.

d. Si una elipse tiene sus diámetros iguales, ¿que tipo de cónica es?

- ◯ Circunferencia.
- ◯ Hipérbola.
- ◯ Parábola.
- ◯ Ninguna de las anteriores.

3 Sucesiones

12. Sucesiones. Sucesiones aritméticas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro; por ejemplo, el conjunto de los números pares. Se denomina **término** a cada uno de los elementos de la sucesión.

2	4	6	8	10	12	...	2n
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_n

En algunas sucesiones se puede encontrar un **término general** a_n (término enésimo), que es la fórmula de un término cualquiera en función del lugar que ocupa. En la sucesión **2; 4; 6; 8; 10; 12; ...**, el término general es $a_n = 2.n$. Si se conoce el término general, se puede hallar cualquier término de la sucesión reemplazando en forma consecutiva los números naturales en el valor de **n** del término general.

Si el término general de una sucesión es $a_n = n + 1$, entonces la sucesión será: 2; 3; 4; ...; n + 1.

Sucesiones aritméticas

Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término se obtiene sumando al anterior un número constante **r** llamado razón aritmética.

2 → 7 → 12 → 17 → 22...

+5 +5 +5 +5

Sucesión aritmética con r = 5

Para que una sucesión sea aritmética debe cumplirse:

- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r$
  $r = a_n - a_{n-1} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1\}$
- El término general a_n es: $a_n = a_1 + (n - 1) . r$

- Para calcular un término determinado de una sucesión aritmética conociendo:
  - dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_5 si $a_1 = 3$ y $a_2 = -2$.

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -2 - 3 \Rightarrow r = -5$

$a_5 = 3 + (5 - 1) . (-5) \Rightarrow a_5 = 3 + 4 . (-5) \Rightarrow a_5 = 3 - 20 \Rightarrow a_5 = -17$

1. Se halla la razón.
2. Se calcula cada término.

- otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_3 si $a_8 = 4$ y $r = -2$.

Se considera a a_3 como primer término ($a_3 \Rightarrow a_1$) y a a_8, por lo tanto, como sexto ($a_8 \Rightarrow a_6$).

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1) . r \Rightarrow 4 = a_1 + 5 .(-2) \Rightarrow a_1 = 4 + 10 \Rightarrow a_1 = 14 \Rightarrow a_3 = 14$

- Para calcular el número de términos de una sucesión aritmética, se deben seguir estos pasos.

Calculen el número de términos de la sucesión sabiendo que $a_1 = -2$; $a_2 = 1$; ...; $a_n = 10$.

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 1 - (-2) \Rightarrow r = 3$

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow 10 = -2 + (n - 1) . 3 \Rightarrow 12 = (n - 1) . 3 \Rightarrow 4 = n - 1 \Rightarrow n = 5$

- Para calcular la suma de los términos de una sucesión aritmética se deben conocer el primer término, el último y la cantidad de términos.

La suma de los **n** primeros términos es: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) . n}{2}$

ACTIVIDADES

12. Sucesiones. Sucesiones aritméticas

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que si $a_n = n^2$ entonces $a_4 = 8$?

b. ¿Es cierto que los siguientes términos corresponden a una sucesión aritmética? 12; 7; 2; −3

c. En una sucesión aritmética, ¿es cierto que si $S_4 = 24$; $r = 2$ entonces $a_3 = 7$?

2. Escriban 3 términos más para cada sucesión y el término general cuando sea posible.

a. 3; 2; 1; _____ $a_n =$ _____

b. −1; −8; −27; _____ $a_n =$ _____

c. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};$ _____ $a_n =$ _____

d. −1; 1; −1; 1; _____ $a_n =$ _____

3. Escriban los 4 primeros términos de estas sucesiones; luego, el término de orden 6. Para recordar pág. 51

a. $a_n = n!$ _____ $a_6 =$ _____

b. $a_n = \frac{n+1}{n}$ _____ $a_6 =$ _____

c. $a_n = n \cdot (n-1)$ _____ $a_6 =$ _____

d. $a_n = n^{\frac{1}{2}}$ _____ $a_6 =$ _____

e. $a_n = 2 \cdot (n+1)$ _____ $a_6 =$ _____

f. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ _____ $a_6 =$ _____

4. Observen la siguiente sucesión de figuras y resuelvan.

a. Grafiquen el cuarto término de la sucesión. a_1 a_2 a_3 a_4

b. Agreguen 3 términos a la sucesión formada por la cantidad de segmentos que compone cada figura. 3; 5; 7; 9: _____

c. Encuentren el término general y calculen el 10.° término de la sucesión. _____

5. Completen con el dato pedido en cada una de las siguientes sucesiones aritméticas.

a. $a_1 = -\frac{1}{2}; r = \frac{1}{2}$ $a_8 =$ _____

b. $a_5 = 3;\ a_7 = 11$ $r =$ _____

c. $a_2 = 1 + \sqrt{2}; a_5 = 1 + 4\sqrt{2}$ $S_6 =$ _____

d. $a_3 = 7; r = -2; a_n = -1$ $n =$ _____

6. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado y para protegerlos del viento planta coníferas alrededor. En el esquema se puede apreciar la distribución según la cantidad de filas de manzanos (n).

n = 1 n = 2 n = 3 n = 4

○ = conífera

■ = manzano

a. Completen la tabla.

n (cantidad de filas)	1	2	3	4	5	n
M (cantidad de manzanos)	1					
C (cantidad de coníferas)	8					

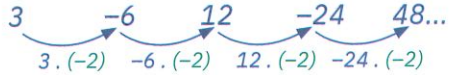
b. Hallen el valor de **n** para el cual la cantidad de manzanos coincide con el de coníferas. _____

c. A medida que aumenta la cantidad plantada, ¿qué se incrementará más rápidamente: la cantidad de manzanos o la de coníferas? Expliquen la respuesta. _____

13. Sucesiones geométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **sucesión geométrica** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene multiplicando el anterior por un número constante **q** llamado razón geométrica.



Sucesión geométrica con q = −2

Para que una sucesión sea geométrica debe verificarse que:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Leftrightarrow a_1 \neq 0$

El término general $\mathbf{a_n}$ es: $\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante **q**.

$a_1 = a_1 \cdot q^0$

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \ldots q}_{n-1 \text{ veces}} = a_1 \cdot q^{n-1}$

La **razón** es igual al cociente entre dos términos consecutivos:

$\mathbf{q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1\}}$

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_5 si $a_1 = 4$ y $a_2 = 2$.

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{2}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow a_5 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow a_5 = 4 \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{4}$

1. Se halla la razón.
2. Se calcula cada término.

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_2 si $a_4 = 1$ y $q = 2$.

Se considera a a_2 como primer término ($a_2 \Rightarrow a_1$) y a a_4, por lo tanto, como tercero ($a_4 \Rightarrow a_3$).

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot 2^{3-1} \Rightarrow 1 = a_1 \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$

• Para calcular la cantidad de términos de una sucesión geométrica, se deben seguir estos pasos.

Calculen la cantidad de términos de la sucesión geométrica sabiendo que $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 2$; $a_n = 512$.

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow q = 4$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512 = a_1 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 512 = 0{,}5 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 1024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

La **suma de los n primeros términos** de una sucesión geométrica se obtiene de la siguiente manera:

$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$ (1)

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$ ← (2) Se multiplican ambos miembros de (1) por **q**.

$-\ S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$ (1)

$S_n \cdot q - S_n = -a_1 \qquad + a_1 \cdot q^n$ ← Se resuelve (2) − (1)

$S_n \cdot q - S_n = -a_1 + a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (-1 + q^n) \Rightarrow \mathbf{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \wedge q \neq 1}$

13. Sucesiones geométricas

Test de comprensión

7. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En una sucesión geométrica $a_3 = 2$ y $a_5 = 4$, ¿es cierto que $q = \sqrt{2}$?

b. El término general de una sucesión geométrica es: $a_n = 3 \cdot (-2)^n$. ¿Es cierto que $a_4 = -48$?

c. En una sucesión geométrica $a_4 = 54$ y $a_2 = 6$. ¿Es cierto que $|q|$ es 3?

8. **Completen con el dato que falta en cada caso, teniendo en cuenta que las sucesiones son geométricas.**

a. $a_2 = 3$; $q = -\frac{1}{2}$ $a_6 =$ _____

b. $a_6 = 32$; $a_2 = 2$ $|q| =$ _____

c. $a_1 = \sqrt{2}$; $q = 2$; $S_n = 31\sqrt{2}$ $n =$ _____

d. $a_n = 3 \cdot 2^n$ $q =$ _____ $S_4 =$ _____

9. **Calculen la suma de los 6 primeros términos de las siguientes sucesiones geométricas.**

a. $a_2 = 4$; $q = \frac{1}{2}$; $S_6 =$ _____

b. $a_3 = \frac{9}{2}$; $q = \frac{3}{2}$; $S_6 =$ _____

c. $a_n = (-3)^n$; $S_6 =$ _____

d. $a_n = -3^n$; $S_6 =$ _____

10. **Tengan en cuenta que las sucesiones son geométricas y resuelvan.**

a. Intercalen 2 términos entre el término de valor 5 y el término de valor 135 de la sucesión.

_____

b. En una sucesión de razón $\frac{1}{2}$, la suma entre el primer y el tercer término es 2. Calculen la suma de los 4 primeros términos.

_____

c. Calculen el valor de los 5 primeros términos de una sucesión sabiendo que $a_1 = -3$ y $S_2 = 3$.

_____

11. **Marquen con una X la opción correcta.**

a. En una sucesión geométrica la suma entre el cuarto y el segundo término es $6\sqrt{2}$ y la diferencia entre ellos es $2\sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de la razón?

_____

_____

- 4 ☐
- $2\sqrt{2}$ ☐
- $\sqrt{2}$ ☐

b. En una sucesión geométrica $a_n = 3^{n-1}$, ¿cuál es el valor de la suma de los 5 primeros términos?

_____

_____

- 120 ☐
- 121 ☐
- 363 ☐

14. Análisis de sucesiones

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen muchas situaciones en las cuales puede aplicarse el concepto de sucesión para resolver diversos problemas de índole práctica.

Cotas superiores e inferiores

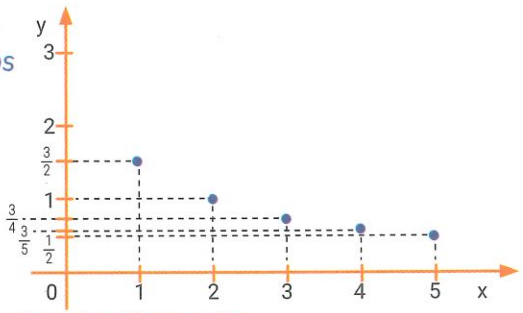
Una sucesión está **acotada superiormente**, si $\exists\, k \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}: k \geq a_n \Rightarrow k$ es cota superior en la sucesión.
Una sucesión está **acotada inferiormente**, si $\exists\, k \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}: k \leq a_n \Rightarrow k$ es cota inferior en la sucesión.
El **supremo** es la menor de las cotas superiores de una sucesión y el **ínfimo** es la mayor de las cotas inferiores de una sucesión.
Una sucesión es **monótona creciente**, si $\exists\, n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n-1}$.
Una sucesión es **monótona decreciente**, si $\exists\, n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n-1}$.

TIP

$\exists$ significa existe.
$\forall$ significa para todo.

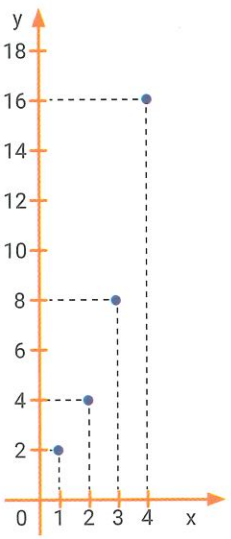
Si el término general de una sucesión es:
$a_n = \frac{3}{n+1}$, entonces la sucesión será: $\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \ldots$

En el gráfico están representados los valores que toman los primeros 5 términos de la sucesión.



- *Esta sucesión está acotada superior e inferiormente.*
- *En este ejemplo 2, 3, 5, 8, 100, son cotas superiores y 0, −1, −2, −3, −4, son cotas inferiores.*
- *El supremo es 1,5 y el ínfimo es 0.*
- *También se afirma que esta sucesión es monótona decreciente, al ser cada término menor que el anterior.*

Si el término general de una sucesión es:
$a_n = 2^n$ entonces la sucesión será: 2; 4; 8; 16; 32; ...
En el gráfico están representados los primeros 4 valores que toma la sucesión.



- *Esta sucesión está acotada inferiormente.*
- *En este ejemplo 1, 0, −1, −2, −3, −4, son cotas inferiores.*
- *El ínfimo es 2.*
- *También se afirma que esta sucesión es monótona creciente, al ser cada término mayor que el anterior.*

ACTIVIDADES

14. Análisis de sucesiones

Test de comprensión

12. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La sucesión $a_n = (-1)^n$ ¿tiene supremo?

b. En la sucesión $a_n = -n^2$, el 5 ¿es una cota superior?

c. La sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ ¿es monótona creciente o decreciente?

13. Indiquen, en caso de ser posible, si las sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes. Expliquen las respuestas. Pueden ayudarse haciendo tablas de valores y/o gráficos en sus carpetas.

a. $a_n = n - 3$ _____

b. $a_n = \frac{1}{n}$ _____

c. $a_n = -n^2$ _____

d. $a_n = \frac{n+1}{2n}$ _____

14. Indiquen si las sucesiones anteriores están acotadas. Escriban tres cotas inferiores y/o tres superiores, el ínfimo y el supremo, cuando sea posible.

a. Acotada: _____

Cotas inferiores: _____

Ínfimo: _____

Cotas superiores: _____

Supremo: _____

b. Acotada: _____

Cotas inferiores: _____

Ínfimo: _____

Cotas superiores: _____

Supremo: _____

c. Acotada: _____

Cotas inferiores: _____

Ínfimo: _____

Cotas superiores: _____

Supremo: _____

d. Acotada: _____

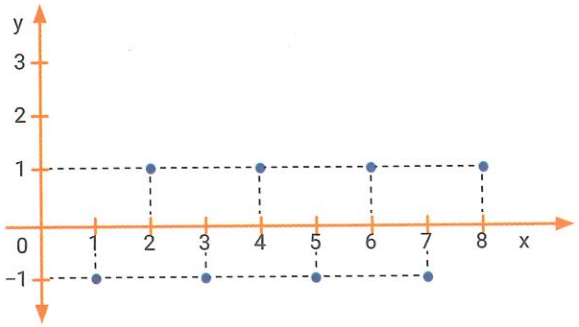
Cotas inferiores: _____

Ínfimo: _____

Cotas superiores: _____

Supremo: _____

15. Observen atentamente el gráfico y respondan.



a. ¿Cuál es el término general de la sucesión? _____

b. La sucesión ¿está acotada? _____

c. La sucesión ¿es monótona creciente, monótona decreciente o ninguna de ellas?

_____

15. Clasificación de sucesiones

▶ SABERES DINÁMICOS

Sucesiones convergentes

Cuando a medida que **n** crece ($n \in \mathbb{N}$), los términos de la sucesión se van acercando a un número, se dice que la sucesión es **convergente**.

Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{2}{n}$, *entonces la sucesión será:*

$2; 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \ldots$

A medida que crece, la sucesión se va acercando a 0.
Se dice que la sucesión converge a ***0*** *o que su límite es* ***0****.*

Sucesiones divergentes

Cuando a medida que **n** crece ($n \in \mathbb{N}$), los módulos de los términos de la sucesión son mayores que cualquier número positivo **k**, la sucesión es **divergente.**

Si el término general de una sucesión es $a_n = 2 \cdot n$, *entonces la sucesión será:*

2; 4; 6; 8; 10; ...

La sucesión diverge porque para cualquier número positivo ***k****, existe un* ***n*** *tal que* $a_n > k$.

Para $k = 1\,600$, *existe* $n = 900$, *tal que* $a_{900} = 1\,800 > k$.

Si a medida que crece, la sucesión se va acercando a valores cada vez más altos, se dice que la sucesión diverge a $+\infty$ *o que su límite es* $+\infty$.

En el caso $a_n = -2 \cdot n$, *la sucesión se va acercando a valores cada vez más bajos y se dice que la sucesión diverge a* $-\infty$ *o que su límite es* $-\infty$.

Sucesiones oscilantes

Cuando una sucesión no es convergente ni divergente, es **oscilante**.

Si el término general de una sucesión es $a_n = 1 - (-1)^n$, *entonces la sucesión será:*

2; 0; 2; 0; 2; ...

Esta sucesión oscila entre los números 0 y 2.

En este caso, la sucesión no tiene límite, por lo tanto, es oscilante.

Sucesiones definidas por recurrencia

Una sucesión está definida por **recurrencia** si para definir el término enésimo se utilizan términos anteriores de la sucesión.

Por ejemplo la sucesión $a_n = 2^n$ *se puede definir por recurrencia de la siguiente manera:*

$a_1 = 2$; $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ *para* $n > 1$

$a_1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 2$; $a_3 = 2 \cdot 4$; $a_4 = 2 \cdot 8$

Áreas dinámicas [Matemática y Biología]

La molécula de ADN tiene una anchura de 21 Ángstroms y la longitud de una vuelta entera en su espiral mide 34 Ángstroms; ambos son números de la sucesión de Fibonacci.

Para recordar pág. 51

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/clasuce * para aprender más acerca de las fórmulas recursivas de sucesiones aritméticas.

*Enlace acortado de https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:sequences/x2f8bb11595b61c86:constructing-arithmetic-sequences/a/writing-recursive-formulas-for-arithmetic-sequences

ACTIVIDADES

15. Clasificación de sucesiones

Test de comprensión

16. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. La sucesión $a_n = \frac{4}{n} + 1$ ¿tiene por límite 1?

b. La sucesión $a_n = -1^n \cdot n$, ¿es oscilante?

c. En la sucesión: $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ para $n > 2$, ¿cuál es el valor de a_4?

17. Grafiquen en sus carpetas las siguientes sucesiones. Clasifíquenlas en convergentes, divergentes u oscilantes. Indiquen el valor del límite cuando sea posible.

a. $a_n = -n$ _____

b. $a_n = \frac{n-2}{n}$ _____

c. $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ _____

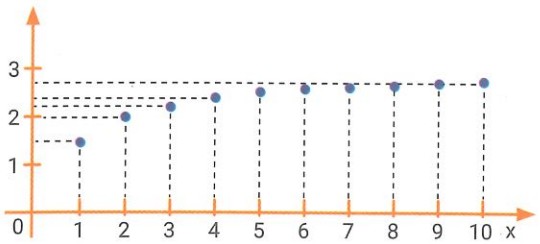
d. $a_n = n^2 - 1$ _____

e. $a_n = \frac{4}{2^n}$ _____

f. $a_n = \frac{2n}{n+1}$ _____

18. Escriban en cada caso si la gráfica corresponde a una sucesión convergente, divergente u oscilante. Indiquen el valor del límite cuando sea posible.

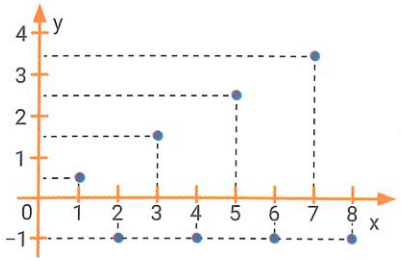
a.



Tipo de sucesión: _____

Límite: _____

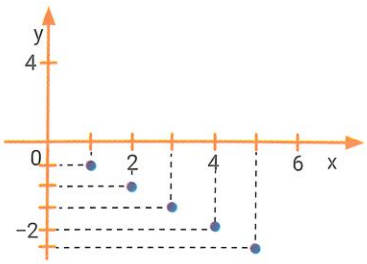
b.



Tipo de sucesión: _____

Límite: _____

c.



Tipo de sucesión: _____

Límite: _____

19. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas falsas.

a. La sucesión $a_n = (-2)^{n+1}$ es monótona creciente. ☐ _____

b. El límite de la sucesión $b_n = \frac{4}{2^n}$ es cero. ☐ _____

c. La sucesión $c_n = (-n)^2$ es oscilante. ☐ _____

d. La sucesión $d_n = n \cdot (n-1)$ es divergente. ☐ _____

15. Clasificación de sucesiones

20. **Propongan para cada caso, si es posible, el término general de una sucesión que cumpla las condiciones pedidas.**

a. Una sucesión convergente en 2 y que sea monótona creciente. _____

b. Una sucesión de términos negativos que sea divergente. _____

c. Una sucesión de términos negativos que sea convergente. _____

d. Una sucesión convergente a 0 cuyo ínfimo sea −2. _____

21. **Tengan en cuenta las sucesiones y resuelvan.**

a. Completen la siguiente tabla.

n	$a_n = \frac{1}{n}$	$b_n = 1$	$c_n = -2n + 10$
1			
10			
100			
1 000			
10 000			
Límite			

b. Clasifiquen las sucesiones en convergentes, divergentes u oscilantes.

_____

c. Marquen con una X la opción correcta.

El término general de $d_n = a_n + b_n$ es: • $d_n = \frac{1}{n} + n$ ☐ • $d_n = 1 + \frac{n}{n}$ ☐ • $d_n = \frac{1+n}{n}$ ☐

El término general de $e_n = \frac{b_n}{a_n}$ es: • $e_n = n^{-1}$ ☐ • $e_n = n$ ☐ • $e_n = -n$ ☐

d. Clasifiquen d_n y e_n en convergente, divergente u oscilante.

_____

22. **Observen la siguiente sucesión y resuelvan.**

1; 3; 6; 10; 15; 21; ...

a. Marquen con una X la opción correcta. La fórmula general de a_n es:

• $n^2 - 1$ ☐ • $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ☐ • $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ☐

b. Hallen a_7; a_{20}; a_{100}. _____

_____

c. Hallen el valor de **n** para que $a_n = 45$. _____

_____

15. Clasificación de sucesiones

23. **Observen las sucesiones definidas por recurrencia y respondan.**

$a_1 = 1;\ a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ $\qquad$ $b_1 = 1;\ b_2 = 1;\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ para $n > 2$

a. Escriban los seis primeros términos de cada sucesión.

Para recordar pág. 51

a_n	b_n

b. Hallen una manera para calcular a_n de forma no recursiva.

24. **Tengan en cuenta los primeros seis términos de esta sucesión y hallen una fórmula definida por recurrencia.**

1; 2; 4; 8; 16; 32; ...

25. **Observen la siguiente sucesión definida por recurrencia y resuelvan.**

$$a_1 = 2;\ a_n = \frac{1}{a_{n-1}} \text{ si } n > 1$$

a. Hallen los 5 primeros términos de esta sucesión.

b. La sucesión anterior ¿es convergente, divergente u oscilante?

26. **Escriban en cada caso los 6 primeros términos de la sucesión y hallen una fórmula, pero por recurrencia.**

a. $a_n = 2 \cdot 3^n$

b. $b_n = 2n - 4$

c. $c_n = 3n - 2$

DinámicaMente

Una pelota cae desde una altura inicial de 10 m, rebota y alcanza una altura igual a la mitad de la altura inicial.

a. Escriban las 4 primeras alturas alcanzadas.

b. Hallen la expresión del término general a_n, siendo n la cantidad de rebotes.

c. En este modelo matemático ¿en algún momento es $a_n = 0$?

d. ¿Y en un experiencia real? ¿Por qué?

Para recordar pág. 51

Integración final

27. Escriban el término general de las sucesiones. Indiquen en cada caso si es aritmética, geométrica o ninguna de las dos. En caso de ser posible, hallen la razón.

a. $-1; 4; 9; 14; 19; \ldots$

b. $15; 5; \frac{5}{3}; \frac{5}{9}; \ldots$

c. $-1; 0; -1; 0; -1; \ldots$

d. $2; 1{,}5; 1; 0{,}5; 0; \ldots$

28. Tengan en cuenta las sucesiones de la actividad anterior y calculen.

a. a_{18}.

b. **n** para que $b_n = \frac{5}{81}$.

c. La suma de los quince primeros términos de c_n.

d. $-2\, d_{10} \cdot c_{50}$.

29. Tengan en cuenta la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{2}{n}$ y respondan.

a. Escriban los ocho primeros términos.

b. Grafiquen la sucesión.

c. ¿Es una sucesión acotada?

d. Indiquen, en caso de ser posible, el ínfimo y el supremo.

e. ¿Es monótona creciente o decreciente?

f. ¿Es convergente? ¿Cuál es el límite?

30. Observen atentamente y resuelvan.

a. Completen teniendo en cuenta la regularidad.

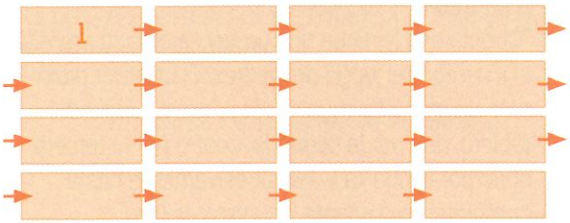
$a_1 = 3$	$a_2 = 6$	$a_3 = 12$
$a_4 = 24$	$a_5 =$	$a_6 =$
$a_7 =$	$a_8 =$	$a_9 =$

b. Encuentren una fórmula que permita calcular el valor de cada casilla.

c. ¿Es una progresión aritmética, geométrica o ninguna de las dos?

d. En caso de ser posible, hallen la razón.

31. Completen la serie sabiendo que el valor de cada casilla es el triple de la anterior. Luego, respondan.



a. Hallen el término general.

b. Hallen a_5.

c. ¿Existe alguna casilla cuyo valor sea 59 049?

32. Resuelvan.

a. Escriban los 4 primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$.

b. ¿Es monótona creciente o decreciente?

c. ¿Está acotada superior o inferiormente?

d. Si es posible, hallen el ínfimo y/o supremo.

e. Clasifiquen la sucesión en convergente, divergente u oscilante.

33. Observen la siguiente sucesión definida recursivamente y respondan.

$$a_1 = -2;\ a_n = a_{n-1} + 5 \text{ para } n > 1$$

a. Escriban los 5 primeros términos de la sucesión.

b. ¿Es una sucesión aritmética o geométrica?

c. Hallen la razón.

d. Hallen una expresión para a_n, que no sea recursiva.

e. ¿Es monótona creciente o decreciente?

f. Indiquen el valor del ínfimo y de otras dos cotas inferiores.

g. Hallen el valor de **n** para que $a_n = 68$.

h. Calculen S_{12}.

i. Grafiquen la sucesión.

34. Reúnanse en grupos, lean atentamente y respondan.

"Cuenta una leyenda que un rey se ofreció premiar al inventor del juego de ajedrez. El inventor pidió solo un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas."

a. Escriban las cantidades de trigo correspondientes a las 8 primeras casillas.

b. ¿Les parece que pidió mucho o poco por el premio?

c. ¿Corresponden a una sucesión aritmética o geométrica?

d. Hallen el término general a_n.

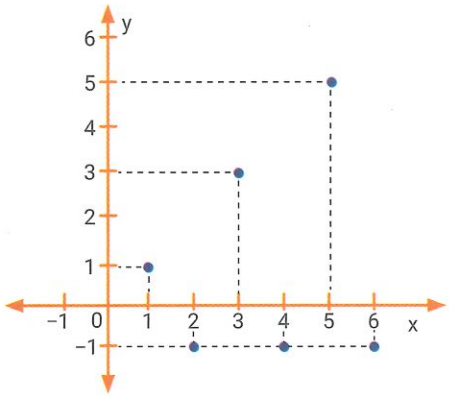
e. Escriban a_n de manera recursiva.

f. ¿Es una sucesión finita o infinita?

g. Indiquen el ínfimo y el supremo.

h. Utilicen la calculadora e indiquen cuántos granos pidió en total.

35. Observen la siguiente sucesión y resuelvan.



a. Escriban el término general a_n.

b. Indiquen si la sucesión es convergente, divergente u oscilante.

c. ¿Está acotada superior y/o inferiormente?

d. En caso de existir, indiquen supremo o ínfimo.

36. Calculen la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 23 y 71.

37. Observen la siguiente secuencia y calculen a_{15} y a_{20}.

2; 1; 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0; 2; ...

38. Tengan en cuenta la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y resuelvan.

a. Utilizando la calculadora escriban los diez primeros términos de la sucesión.

b. Calculen a_{100}, a_{1000} y a_{10000}.

c. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

- Los términos de la sucesión son positivos. ☐
- Cada término es mayor que el anterior. ☐
- Si se toman **n** suficientemente grandes, los términos de la sucesión son mayores que 3. ☐

d. Indiquen si la sucesión es acotada.

e. Escriban tres cotas inferiores y tres superiores.

f. En caso de ser posible escriban el ínfimo y el supremo.

g. Indiquen si la sucesión es monótona y en caso de serlo si es creciente o decreciente.

39. Realicen el dibujo pedido. Luego, resuelvan.

Dibujen un cuadrado de área = 1. Unan los puntos medios de sus lados determinando un cuadrado interior. Reiteren el procedimiento en el segundo cuadrado y así sucesivamente.

a. Completen sabiendo que a_n es el área del cuadrado en el paso "n".

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$

$a_4 =$ $a_5 =$ $a_n =$

b. Indiquen si es una sucesión aritmética, geométrica o ninguna de las dos.

c. En caso de ser posible, hallen la razón.

d. Calculen la suma de las áreas de los primeros 6 cuadrados.

e. Calculen **n** para que $a_n < \frac{1}{32}$.

f. ¿Es una sucesión acotada?

g. Indiquen ínfimo y supremo, cuando sea posible.

h. ¿Es una sucesión monótona? Clasifíquenla.

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Valor absoluto de un número real*

El **valor absoluto** o **módulo** de un número real **x**, se denota por **|x|** y representa su distancia al 0 sobre la recta real, por ser la distancia siempre positiva o cero, para todo $x \in \mathbb{R}$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*En la página 9 está la explicación completa.

Sucesión de Fibonacci

La **sucesión de Fibonacci** es una sucesión numérica donde cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

Factorial de un número

$0! = 1$ $\qquad$ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 1$ si $n > 0$

Modelo matemático

Un **modelo matemático** es una representación matemática que pretende interpretar alguna situación que puede ocurrir en los distintos ámbitos de las diferentes ciencias o disciplinas. Puede representarse, por ejemplo, a través de un gráfico, una ecuación o algún tipo de expresión matemática.

Notación científica

La **notación científica** consiste en expresar cualquier número como el producto entre un número decimal de una única cifra entera mayor que cero y una potencia de 10.

Ejemplos:

$12\,340\,000 = 1{,}234 \cdot 10^{7}$ $\qquad$ $0{,}0000123 = 1{,}23 \cdot 10^{-5}$

Número irracional

Un **número irracional** es un número que no puede expresarse como cociente de dos números enteros. Por lo tanto, tampoco puede expresarse en forma periódica.

Ejemplos:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ $\qquad$ $e = 2{,}71828182...$

$\pi = 3{,}14159265...$ $\qquad$ $1{,}23456789...$

Potenciación con exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenciación con exponente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

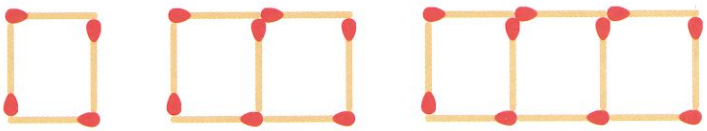
40. ¿Cuál es la razón de la sucesión aritmética que tiene por término general $a_n = 2 - 4n$?

○ 4 ○ 2 ○ −4 ○ −2

41. En una sucesión aritmética $a_2 + a_4 = 18$ y $a_4 - a_2 = -6$. ¿Cuál es la suma de los seis primeros términos?

○ 45 ○ 48 ○ 42 ○ 46

42. Observen la sucesión y tengan en cuenta la cantidad de fósforos de cada término.



1 2 3

¿Cuál es el término general de la sucesión?

○ $a_n = 4n - 1$ ○ $a_n = 1 + 3n$ ○ $a_n = n + 3$ ○ $a_n = 3n - 1$

43. Tengan en cuenta cada sucesión y respondan.

Para recordar pág. 51

a. ¿Qué tipo de sucesión es $a_n = \frac{1}{2^{-n}}$?

○ Creciente. ○ Decreciente. ○ Oscilante.

b. ¿Qué tipo de sucesión es $b_n = -(-2)^n$?

○ Creciente. ○ Decreciente. ○ Oscilante.

c. La sucesión $c_n = -n \cdot (n - 2)$, ¿tiene ínfimo, supremo o ambos?

○ Ínfimo. ○ Supremo. ○ Ínfimo y Supremo.

d. ¿Qué tipo de sucesión es $d_n = \frac{2n}{n+1}$?

○ Oscilante. ○ Monótona decreciente. ○ Monótona creciente.

44. ¿Cuál es el sexto término de la siguiente sucesión? $a_1 = 1$; $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

○ $\frac{8}{5}$ ○ $\frac{13}{8}$ ○ $\frac{13}{5}$

4 Funciones

16. Funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función** es una relación entre dos variables (generalmente llamadas **x**: variable independiente e **y**: variable dependiente), donde a cada valor de la primera (**x**) le corresponde **un único valor** de la segunda (**y**).
Estas condiciones reciben el nombre de **unicidad** y **existencia**.
Simbólicamente:

$$f: A \to B \text{ es función de A en B} \Leftrightarrow \forall\, x \in A\ \exists!\ y \in B \,/\, y = f(x)$$

TIP

$\exists!$ significa existe un único.

Conjunto dominio, codominio e imagen de una función

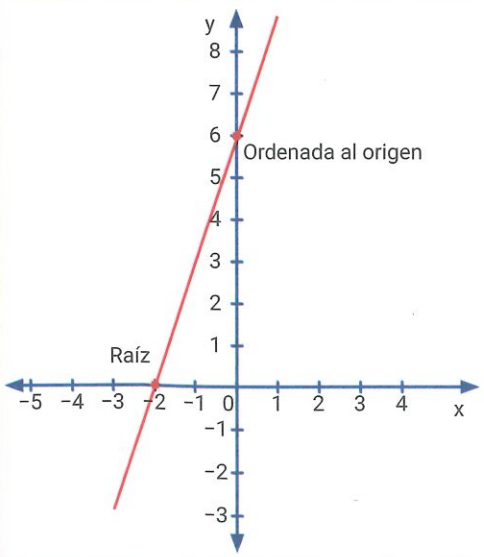
- El **conjunto dominio** (o simplemente **dominio** de la función) es el conjunto formado por los valores de la variable **x**. Se designa **Dm** o D_f.
- El **conjunto codominio** (o simplemente **codominio** de la función) está formado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente **y**. Se designa C_f.
- El **conjunto imagen** (o simplemente **imagen** de la función) es un subconjunto del codominio y está formado por los valores de **y** que toma la función. Se designa **Im** o I_f.

La **representación gráfica** de una función es el conjunto de todos los puntos (x; y), para los cuales y = f(x).

Raíces (o ceros) de una función. Ordenada al origen

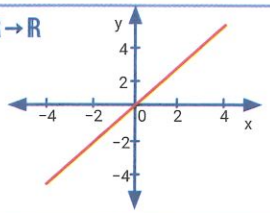
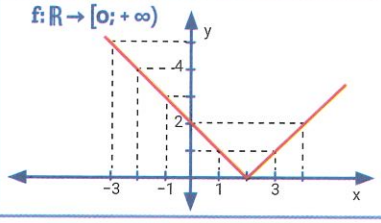
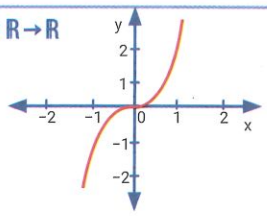
Para recordar pág. 83

- Las **raíces** de una función y = f(x) son los valores de **x** en los cuales **f(x) = 0**.
- La **ordenada al origen** es el valor de **y** para **x = 0**.

	Analíticamente	Gráficamente	Ejemplo
Raíz	x_0 es raíz de f(x) si $f(x_0) = 0$	Coordenada "x" de los puntos de intersección de la gráfica con el eje x.	
Ordenada al origen	f(0) = y	Coordenada "y" del punto de intersección de la gráfica con el eje y.	

16. Funciones

Clasificación de funciones

Inyectiva	Sobreyectiva	Biyectiva
Una función es **inyectiva** si y solo si a elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas en el codominio.	Una función es sobreyectiva si y solo si todo elemento del codominio tiene una preimagen en el dominio.	Una función es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 	$f: \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ 	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 
Para determinar gráficamente si una función es inyectiva, al trazar rectas paralelas al eje x, estas deben cortar a la gráfica de la función en un solo punto.	Para determinar si una función es sobreyectiva, se debe cumplir que el codominio de la función sea igual a su imagen. Es decir, $C_f = I_m$.	Para determinar que una función es biyectiva, se debe analizar si se cumplen a la vez las dos condiciones: inyectiva y sobreyectiva.

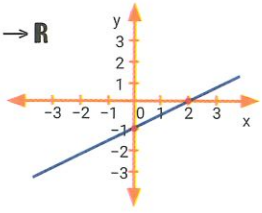
ACTIVIDADES

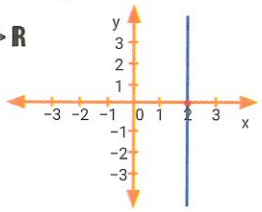
16. Funciones

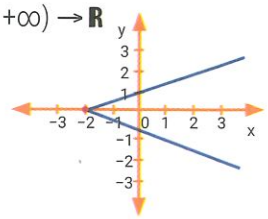
Test de comprensión

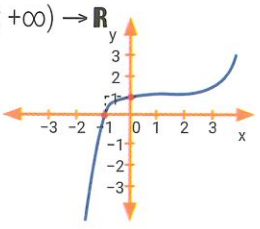
1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   - **a.** Si para x = 4 existen dos imágenes, ¿es función?
   - **b.** Si en una función y = f(x) se cumple que f(6) = 2, ¿cuáles son las coordenadas del punto que le corresponde en la gráfica?
   - **c.** Una función que tiene $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R}$ e $I_f = (0; +\infty)$, ¿es biyectiva?

2. ¿Cuál de los siguientes gráficos no corresponde a una función? Expliquen la respuesta.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 

c. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 

b. $f: (-3; +\infty) \to \mathbb{R}$ 

d. $f: [-2; +\infty) \to \mathbb{R}$ 

16. Funciones

3. Completen las afirmaciones para que resulten verdaderas.

a. Si f(−1) = 8, la imagen es ☐ y la preimagen es ☐.

b. Si 9 = f(5), la imagen es ☐ y la preimagen es ☐.

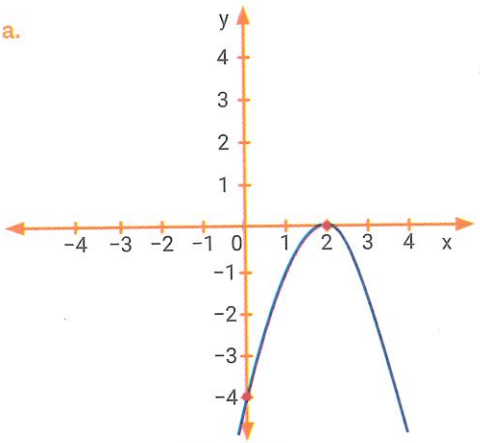
c. Si la raíz de f(x) es 7, entonces f(☐) = ☐.

d. Si la ordenada al origen de f(x) es −3, entonces f(☐) = ☐.

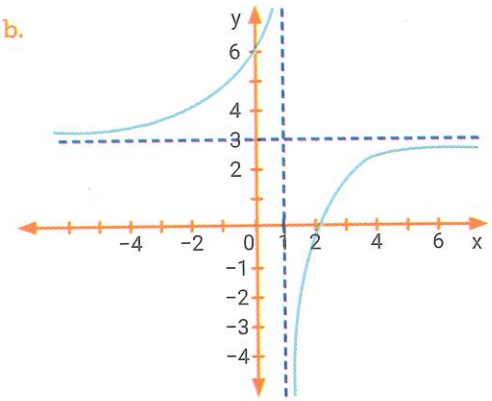
e. Si el gráfico de la función pasa por el punto (8; 6), entonces f(☐) = ☐.

4. Escriban el dominio y la imagen de las funciones representadas en cada gráfico.

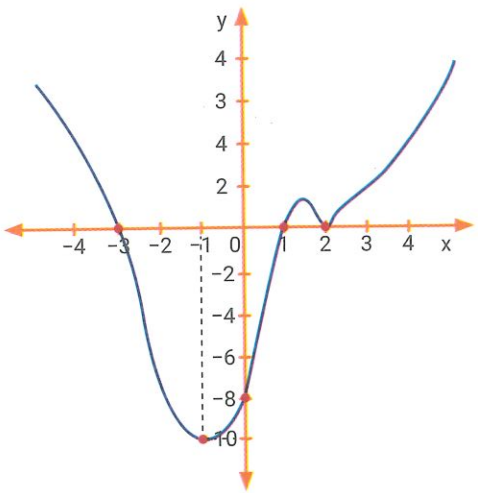
a.



b.



5. Observen el gráfico y respondan.



a. El D_f de la función es: _____

b. La I_f de la función es: _____

c. Las raíces de la función son: _____

d. La ordenada al origen de la función es: _____

e. La imagen de x = 2 es: _____

f. La preimagen de y = −10 es: _____

6. Completen la tabla.

Función f(x)	f(−1)	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	f(0)	f(1,5)	f(2)
$f(x) = -2x + 1$					
$f(x) = -x^2 - 1$					
$f(x) = \frac{x+1}{2x}$					
$f(x) = 2^x - 3$					

16. Funciones

7. Calculen el dominio en cada función.

a. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ _____

b. $g(x) = 2(x - 1)^2 + 8$ _____

c. $h(x) = \frac{x + 4}{x - 3}$ _____

d. $s(x) = 3^{x+1}$ _____

e. $u(x) = \sqrt{x}$ _____

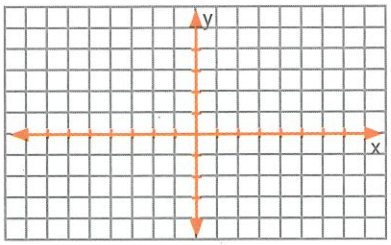
f. $t(x) = -2x - 3$ _____

g. $r(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ _____

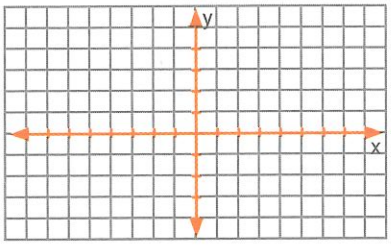
h. $w(x) = \sqrt{2x + 6}$ _____

8. Realicen un gráfico aproximado de una función que cumpla lo pedido en cada caso.

a. $Dm = \mathbb{R}$; $f(0) = 4$ y $C_0 = \{-3; 2\}$



b. $Dm = (-\infty; 1]$; $f(-1) = -2$ y $f(1) = 0$

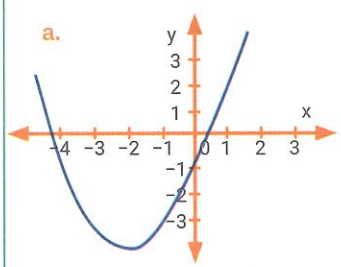


¿Existe un único gráfico posible para cada caso?

_____

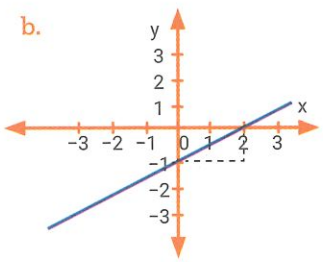
9. Observen los gráficos y escriban Sí o No, según corresponda. Tengan en cuenta que son funciones definidas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a.



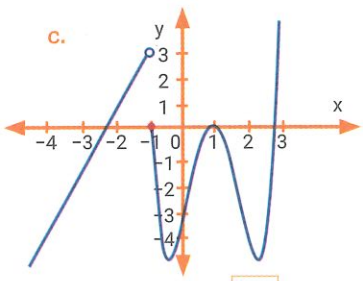
Inyectiva	☐
Sobreyectiva	☐
Biyectiva	☐

b.



Inyectiva	☐
Sobreyectiva	☐
Biyectiva	☐

c.



Inyectiva	☐
Sobreyectiva	☐
Biyectiva	☐

10. Definan un dominio y un codominio para que las funciones sean biyectivas.

a. $f(x) = 9x - 2$ _____

b. $g(x) = \sqrt{x}$ _____

c. $h(x) = |3x|$ _____

17. Función inversa

▶ SABERES DINÁMICOS

Cuando una función y = f(x) es biyectiva, entonces admite **función inversa**.

Si **f: A → B / y = f(x) es biyectiva, entonces f^{-1}: B → A / x = f^{-1}(y)**

Para obtener la fórmula de la función inversa $f^{-1}(x)$, se siguen los siguientes pasos:

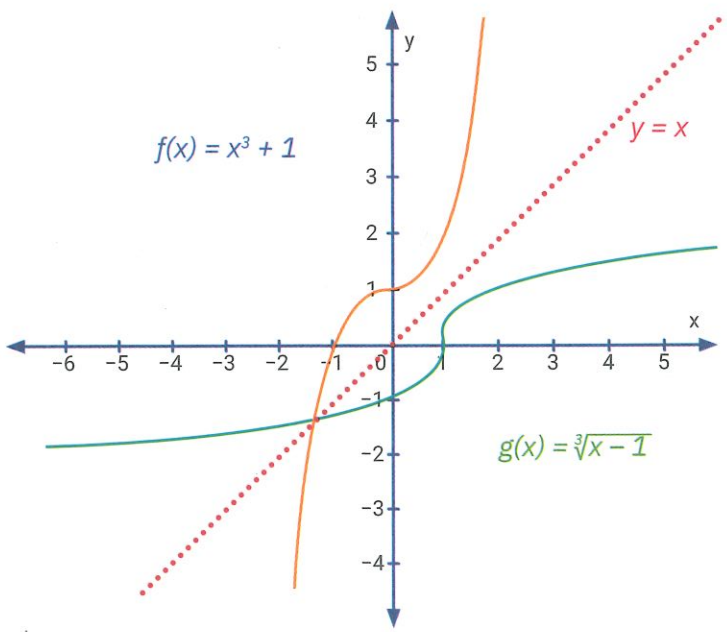
Pasos	Ejemplo: f(x) = 2x − 6
1. Se hace f(x) = y.	$y = 2x - 6$
2. Se intercambian las variables.	$x = 2y - 6$
3. Se despeja y.	$y = \frac{1}{2}x + 3$
4. Se hace y = f^{-1}(x).	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Dadas una función y su función inversa, se cumple que si **f(a) = b**, entonces **f^{-1}(b) = a**.

$f(x) = 2x - 6$ $\qquad$ $f(1) = 2 \cdot 1 - 6 = -4$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$ $\qquad$ $f^{-1}(-4) = \frac{1}{2}.(-4) + 3 = 1$

Las gráficas de dos funciones inversas [f(x) y g(x)] son simétricas respecto de la función y = x cuyo gráfico es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fuinver * para mirar un video donde se explica un procedimiento geométrico para obtener la gráfica de la función inversa a una función.

*Enlace acortado de https://youtu.be/vKqRC-aZIZA

ACTIVIDADES

17. Función inversa

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Si $f(-2) = 8$, entonces ¿se cumple que $f^{-1}(8) = -2$?

b. ¿Es cierto que todas las funciones admiten una función inversa?

c. ¿Es lo mismo la función inversa que la inversa de una función?

12. **Marquen las opciones correctas.**

¿Cuáles de las siguientes funciones definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admiten funciones inversas?

a. $f(x) = -x - 5$ ☐

b. $f(x) = x^2 - x - 2$ ☐

c. $f(x) = 4 . |2 - x|$ ☐

d. $f(x) = x^3 - 1$ ☐

13. **Hallen la función inversa de cada función.**

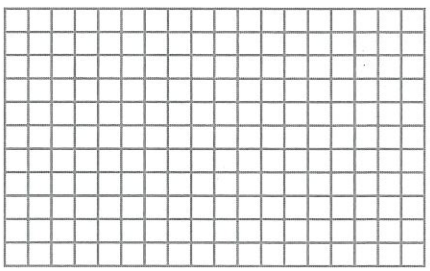
a. $f(x) = 2(x - 3) + 8$

c. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

b. $f(x) = x^5 + 4$

d. $f(x) = -x$

14. **Hallen la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$ y grafiquen ambas funciones.**



15. **Calculen lo pedido en cada caso.**

a. $f(x) = 4(x - 1) + 2$

$f^{-1}(-1) =$ _____

$f^{-1}(3) =$ _____

b. $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

$g^{-1}(1) =$ _____

$g^{-1}(-1) =$ _____

c. $h(x) = \sqrt[5]{2x}$

$h^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$ _____

$h^{-1}(0) =$ _____

d. $j(x) = -2x^3$

$j^{-1}(16) =$ _____

$j^{-1}(-2) =$ _____

18. Composición de funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

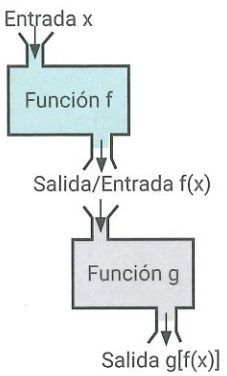
Una **función compuesta (f o g)(x)** o **(g o f)(x)** es una función formada por la composición o aplicación sucesiva de otras dos funciones de f(x) y g(x).

Para que sea posible componer dos funciones, el codominio de una de las funciones debe estar incluido o ser igual al dominio de la otra función.

Dadas dos funciones, $f: A \to B$ y $g: B' \to C$, tales que $B \subseteq B'$

TIP

⊆ significa incluido o igual.



$$f: A \to B \wedge g: B' \to C \Rightarrow g \circ f: A \to C \,/\, (g \circ f)(x) = g[f(x)] \;\forall\; x \in A$$

Ejemplo para $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2 + 2$:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$= g[2x - 1]$ Se sustituye f(x) por su fórmula.

$= (2x - 1)^2 + 2$ Se sustituye en la fórmula de g(x) a x por la fórmula de f(x).

$= 4x^2 - 4x + 1 + 2$ Se resuelve.

$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 3$

- La composición de funciones **no es conmutativa** $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x + 4 \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = 3x - 5$	
$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)(x)$
$g[f(x)] = g(x + 4)$ $= 3(x + 4) - 5$ $= 3x + 12 - 5$ $(g \circ f)(x) = 3x + 7$	$f[g(x)] = f(3x - 5)$ $= 3x - 5 + 4$ $(f \circ g)(x) = 3x - 1$

- La composición de funciones es **asociativa** $(f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h)(x)$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -2x \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = x + 8 \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = 2x + 7$	
$(f \circ g) \circ h(x)$	$f \circ (g \circ h)(x)$
$(f \circ g)(x) = -2(x + 8) = -2x - 16$ $(f \circ g) \circ h(x) = -2(2x + 7) - 16$ $= -4x - 14 - 16$ $(f \circ g) \circ h(x) = -4x - 30$	$(g \circ h)(x) = (2x + 7) + 8 = 2x + 15$ $f \circ (g \circ h)(x) = -2(2x + 15)$ $f \circ (g \circ h)(x) = -4x - 30$

- La composición entre una función f(x) **con su inversa** $f^{-1}(x)$ da por resultado la función identidad $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 3x - 6 \quad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x + 2$	
$(f \circ f^{-1})(x)$	$(f^{-1} \circ f)(x)$
$(f \circ f^{-1})(x) = 3\left(\frac{1}{3}x + 2\right) - 6$ $= x + 6 - 6$ $(f \circ f^{-1})(x) = x$	$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{1}{3}(3x - 6) + 2$ $= x - 2 + 2$ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/compofc * para mirar un video donde se explica la composición de funciones.

*Enlace acortado de https://youtu.be/Qw9GTgSv_94

ACTIVIDADES

18. Composición de funciones

Test de comprensión

16. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Si f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y g: $(0; +\infty) \to \mathbb{R}$, ¿es posible hallar $(g \circ f)(x)$?

b. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 6x$, ¿cuál es el resultado de $g \circ f(-1)$?

c. Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -3x$, ¿es cierto que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$?

17. Hallen las composiciones pedidas teniendo en cuenta las funciones dadas.

$f(x) = -3x + 2$ $\quad$ $g(x) = (x + 1)^2$

a. $f \circ g(x) =$

c. $f \circ f^{-1}(x) =$

b. $f \circ f(x) =$

d. $g \circ f(x) =$

18. Calculen lo pedido en cada caso teniendo en cuenta las funciones dadas.

$f(x) = 5x$ $\quad$ $g(x) = \frac{x - 2}{x + 4}$ $\quad$ $h(x) = -3x + 6$

a. $f \circ g(-1) =$

c. $g \circ f^{-1}(2) =$

b. $(h \circ f) \circ f(0) =$

d. $(g \circ f)^{-1}(2) =$

19. Respondan y expliquen los procedimientos utilizados.

a. Si $f(x) = -x + 7$ y $g(x) = 2x^2$, ¿la función $h(x) = 2x^2 - 28x + 98$ es el resultado de componer $(g \circ f)(x)$ o de componer $(f \circ g)(x)$?

b. Si $f(x) = 3(x - 1) + 4$ y $f \circ g(x) = x$, ¿cuál es la fórmula de $g(x)$?

19. Interpretación y análisis de gráficos

▶ SABERES DINÁMICOS

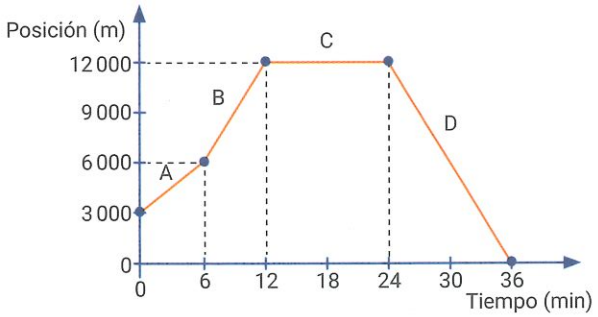
Las funciones matemáticas tienen múltiples aplicaciones y sirven para mostrar cómo se comporta una variable respecto de otra.

A partir del gráfico de una función se puede describir su comportamiento e interpretarla teniendo en cuenta las variables y el contexto al cual representa.

Se debe tener en cuenta:

- Las variables que relacionan la función.
- El dominio en el cual está definida y la continuidad.
- Las intersecciones con los ejes y los puntos máximos y mínimos.
- La imagen de la función.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los intervalos donde la función permanece constante.
- Los intervalos de positividad y negatividad.

El siguiente gráfico representa la posición "P" (expresada en metros) en función del tiempo "t" (expresado en minutos); es decir, es la representación de y = P(t).



¿Qué se puede analizar a partir del gráfico?

a. *¿Cuáles son las variables independiente y dependiente?*

La variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la posición.

b. *¿Cuál es el dominio de la función en el contexto del problema?*

Es una función continua y se define para $0 \leq t \leq 36$, $D_f = [0; 36]$.

c. *¿Cuál es su posición en el instante inicial (t = 0)?* *P = 3 000 m.*

d. *¿En qué momento su posición es P = 0?* *t = 36 min.*

e. *¿Cuál es la imagen de la función en el contexto del problema?* *$I_f = [0; 12\,000]$.*

f. *¿Cuáles son los intervalos en donde la posición aumenta? ¿Y cuáles, donde la posición disminuye?*

Aumenta en (0; 12) y disminuye en (24; 36).

g. *¿Hay algún momento en que la posición se mantiene constante?*

Sí, se mantiene constante en (12; 24).

h. *¿Hay algún momento en que su posición es negativa? ¿Y positiva?* *No. Sí, en [0; 36]*

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

En física los gráficos se usan para relacionar la posición de un móvil en función del tiempo, o la aceleración en función de la velocidad o la energía potencial en función de la altura, entre muchísimos otros ejemplos de fórmulas que relacionan entre sí a dos o más variables.

ACTIVIDADES

19. Interpretación y análisis de gráficos

Test de comprensión

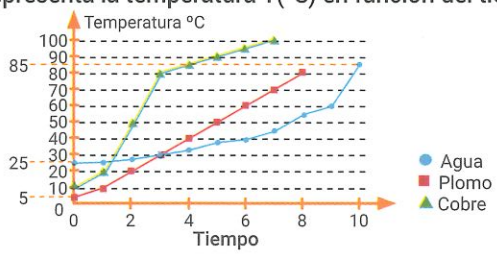
20. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Al representar gráficamente una función, ¿dónde se colocan las variables que relaciona la función? ¿Cuál se coloca en cada uno?

b. ¿Es cierto que todas las funciones que se representan tienen dominio igual a $\mathbb{R}$?

c. ¿Es cierto que todas las funciones tienen máximos y/o mínimos?

21. Observen el gráfico que representa la temperatura T(°C) en función del tiempo t (minutos) y respondan.



a. ¿Cuál es la variable independiente y cuál, la variable dependiente?

b. ¿Cuál es el dominio de cada función graficada?

c. ¿Alguna de las funciones es discontinua?

d. ¿Cuál es la temperatura inicial para cada sustancia?

e. En algún momento, ¿alguna de las sustancias mantiene su temperatura constante?

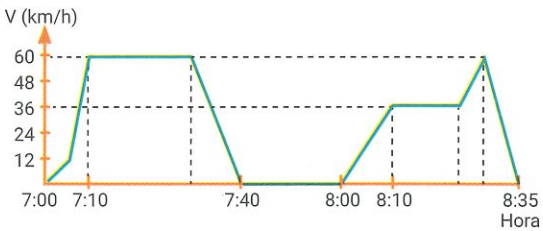
f. ¿Cuál es el intervalo de crecimiento de la temperatura del plomo? ¿Y de decrecimiento del agua?

g. ¿Cuál es el conjunto imagen para cada una de las funciones?

h. ¿En qué momento la temperatura del agua es la misma que la del plomo?

22. Lean atentamente, observen el gráfico y resuelvan.

Juan salió con el auto muy temprano de su casa para ir a trabajar. En un momento, durante el camino, pinchó un neumático y tuvo que detenerse para cambiarlo por la rueda de auxilio. Después decidió volver a su casa porque no quería seguir viaje usando la rueda de auxilio, y esperar hasta que abriera la gomería y llevar el auto.



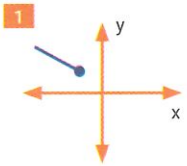
a. ¿Cuál fue la velocidad máxima durante el viaje?

b. ¿Qué hora era cuando Juan se detuvo? ¿Durante cuánto tiempo estuvo detenido cambiando el neumático?

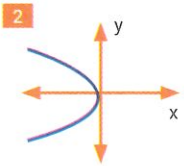
c. ¿El camino de vuelta a casa de Juan fue más corto que la distancia recorrida desde su casa al lugar donde pinchó el neumático y frenó? Den una explicación que fundamente la respuesta utilizando la información que proporciona el gráfico.

23. Indiquen cuáles de los siguientes gráficos corresponden a una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y cuáles, no. Expliquen las respuestas.

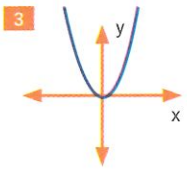
1



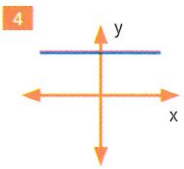
2



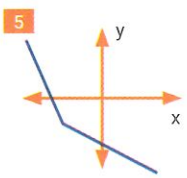
3



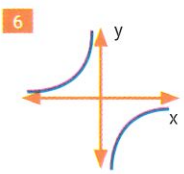
4



5

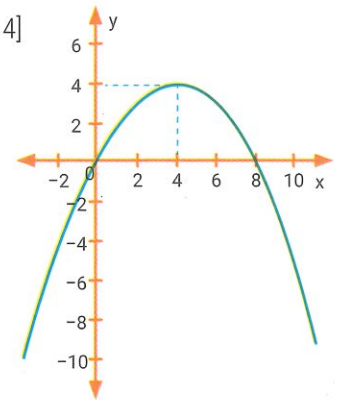


6

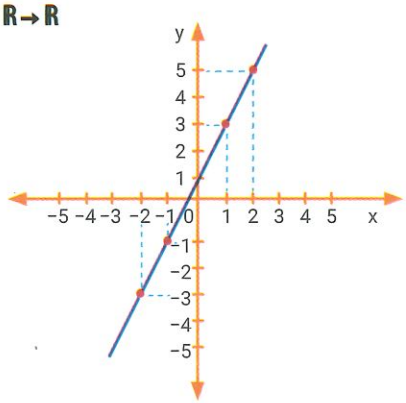


24. Clasifiquen las siguientes funciones en inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

a. $f: \mathbb{R} \to (-\infty; 4]$



b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



25. Calculen el dominio de cada función.

a. $f(x) = 5x - 1$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x^3 + 4x$

d. $f(x) = \sqrt{2x - 8}$

e. $f(x) = \frac{4 - x}{2(x - 3)}$

f. $f(x) = 1 + 2^x$

g. $f(x) = |3x + 4| - 2$

h. $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 4}$

26. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Gráficamente, la raíz o cero de una función corresponde al punto de intersección del gráfico de la función con el eje "y". ☐

b. En la relación "Temperatura de la ciudad de Buenos Aires según la hora del día", la temperatura corresponde a la variable independiente. ☐

c. Todas las funciones son crecientes o decrecientes. ☐

d. Todas las gráficas de las funciones con $D_f = \mathbb{R}$ cortan al eje "y". ☐

27. Hallen la función inversa de cada función.

a. $f(x) = 7x - 14$

b. $f(x) = \frac{3 + x}{x - 6}$

c. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4) + 2$

d. $f(x) = \sqrt[3]{x - 5}$

e. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$

f. $f(x) = \frac{3}{5x}$

g. $f(x) = x^3 + 8$

h. $f(x) = \frac{3 + x}{5x}$

28. **Completen la tabla, grafiquen y respondan teniendo en cuenta la función dada.**

$f: [-3; 3] \to [1; 4] / f(x) = |x| + 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)							

a. ¿Cuáles son el dominio y la imagen?

b. ¿Cuál es la raíz? ¿Y la ordenada al origen?

c. ¿Es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva?

d. ¿Cuál es el intervalo de crecimiento?

e. ¿Tiene máximo y/o mínimo?

29. **Hallen las funciones compuestas, a partir de las funciones dadas.**

$f(x) = 2(x-1)^3$ $\quad g(x) = -4x$

$h(x) = \sqrt{3x}$ $\quad t(x) = \dfrac{2x-2}{x+6}$

a. $f \circ g(x) =$

b. $t \circ g(x) =$

c. $t \circ t^{-1}(x) =$

d. $h \circ f(x) =$

e. $g^{-1} \circ f(x) =$

f. $h \circ g(x) =$

30. **Calculen lo pedido en cada caso.**

a. La ordenada al origen de $f \circ g(x)$ siendo $f(x) = 5x$ y $g(x) = 3x^2 + 1$.

b. La raíz de $f^{-1}(x)$ siendo $f(x) = 5x$.

c. La inversa de $g \circ g(x)$ siendo la función $g(x) = -4x + 2$.

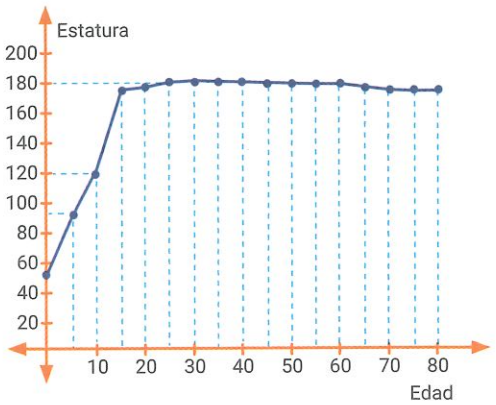
d. La función $f(x)$ siendo $g(x) = 7x$ y $f \circ g(x) = x$.

e. $g \circ f(1)$ siendo $g(x) = 4x + 2$ y $f(x) = x^2 + 1$.

f. $f^{-1}(3)$ siendo $f(x) = \dfrac{4x+1}{3x+6}$.

31. **Observen cada gráfico y respondan.**

A



a. ¿Cuáles son las variables?

b. ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función?

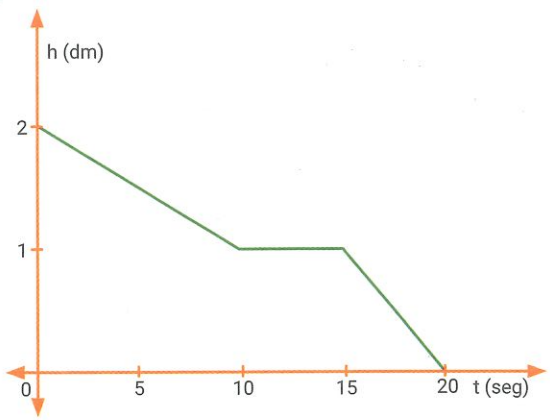
c. ¿Cuál es la estatura inicial?

d. ¿En qué momento crece?

e. ¿En qué momento su altura es constante?

f. ¿A qué edad alcanza los 120 cm?

B



g. ¿Cuáles son las variables?

h. ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función?

i. ¿Cuál es la estatura inicial?

j. ¿En qué momento crece?

k. ¿En qué momento decrece?

l. ¿En qué momento la altura es constante?

20. Función lineal

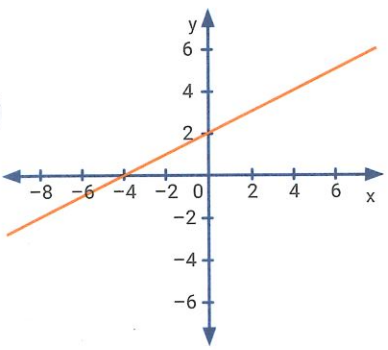
▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función lineal** es aquella de la forma **f(x) = mx + b** (siendo **m** y **b** números reales), donde **m** es la pendiente y **b** la ordenada al origen.
La representación gráfica de una función lineal es una **recta.**

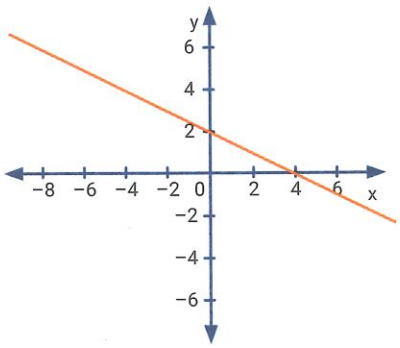
$$f(x) = -4x + 1 \text{ donde } \begin{cases} m = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

- La **pendiente "m"** indica la inclinación de la recta y determina si la función lineal es creciente, decreciente o constante según su valor sea positivo, negativo o nulo, respectivamente.

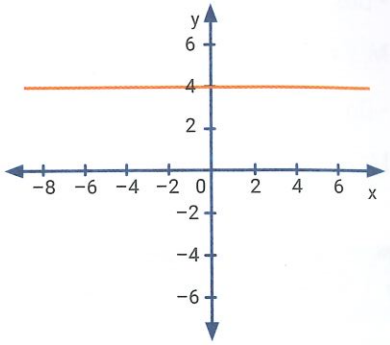
m > 0



m < 0



m = 0



- La **ordenada al origen "b"** indica el punto de intersección de la recta con el eje y.

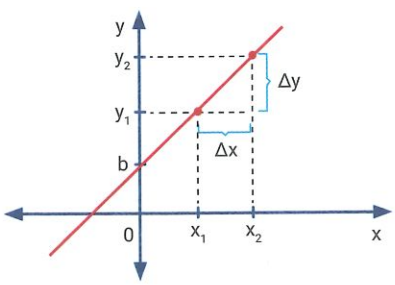
Cálculo de pendiente, raíz y ordenada al origen

Pendiente	Raíz	Ordenada al origen
Es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx) entre cualquier par de puntos p = $(x_1; y_1)$ y q = $(x_2; y_2)$ de la recta.	Es el valor de x donde la recta corta al eje de las abscisas (eje "x"). $f(x) = 0$	Es el valor de y donde la recta corta al eje de las ordenadas (eje y) $y = f(0)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$0 = mx + b \Rightarrow x = -\frac{b}{m}$	$f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b.$

Representación gráfica de una función lineal

Para graficar una función lineal se necesita ubicar dos puntos. Primero se marca el punto que corresponde a la ordenada al origen (b) y, a partir de ella, se marca un segundo punto que se ubica según la información brindada por la pendiente (m).

$$m = \frac{\Delta y \text{ (indica desplazamiento vertical)}}{\Delta x \text{ (indica desplazamiento horizontal)}}$$



20. Función lineal

Formas de la ecuación de la recta

Forma explícita	Forma implícita o general	Forma segmentaria
$y = mx + b$	$Ax + By + C = 0$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
m: pendiente b: ordenada al origen	$-\frac{C}{A}$: raíz $(A \neq 0)$ $-\frac{C}{B}$: ordenada al origen $(B \neq 0)$	a: abscisa al origen b: ordenada al origen

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dos rectas son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales.

$M: y = m_1 x + b_1 \wedge P: y = m_2 x + b_2 \wedge M \parallel P \Leftrightarrow m_1 = m_2$

- Dos rectas son **perpendiculares** si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

$M: y = m_1 x + b_1 \wedge N: y = m_2 x + b_2 \wedge S \perp N \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

ACTIVIDADES

20. Función lineal

Test de comprensión

32. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En la ecuación de la recta $y = x$, ¿es cierto que la pendiente vale 0?

b. La recta T de ecuación $y = -2x + 9$ y la recta R de ecuación $R: 4x + 2y - 8 = 0$, ¿son paralelas o perpendiculares?

c. ¿Es cierto que la forma explícita de una recta es única; en cambio, existen infinitas formas implícitas que definen a la misma recta?

33. Completen la tabla.

Función lineal	m	b	¿Es creciente, decreciente o constante?
$y = 4x + 3$			
$y = -x - 8$			
$y = 11$			
$y = \frac{1}{5}x - 6$			

34. Calculen la pendiente de la recta que pasa por los puntos "p" y "q".

a. $p = (-1; 4)$; $q = (1; -6)$

b. $p = (3; 8)$; $q = (2; 0)$

20. Función lineal

35. Escriban la ecuación explícita de la recta que cumpla las condiciones y, luego, grafiquen en sus carpetas.

a. Tiene por pendiente 8 y ordenada al origen −3.

b. Tiene la misma pendiente que la recta $y = 5x - 6$ y corta al eje "y" en −4.

c. Es una función constante y tiene la misma ordenada al origen que $y = 2x + 7$.

d. Tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y pasa por el origen del sistema de coordenadas.

36. Completen con // (paralelas) o ⊥ (perpendiculares) según corresponda.

a. $3x = y + 6 \square\ y = 3(x - 1) + 5$

b. $y + x = 3 \square\ \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

c. $6(x - y) + 8 = 0 \square\ y = -x - 1$

d. $\frac{x}{-2} + y = 1 \square\ y = -2(x - 1) + 7$

e. $y = 2x - 3 \square\ -2x + y - 9 = 0$

f. $\frac{x}{3} + y = 1 \square\ \frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{7} = 1$

37. Escriban la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos indicados.

a. p = (0; 7) y q = (2; −3)

b. p = (1; 4) y q = (−1; −10)

c. p = (1; 5) y q = (−7; 5)

d. p = (1; 7) y q = (0; 8)

e. p = (6; 5) y q = (1; 0)

f. p = (4; 6) y q = (−8; 2)

20. Función lineal

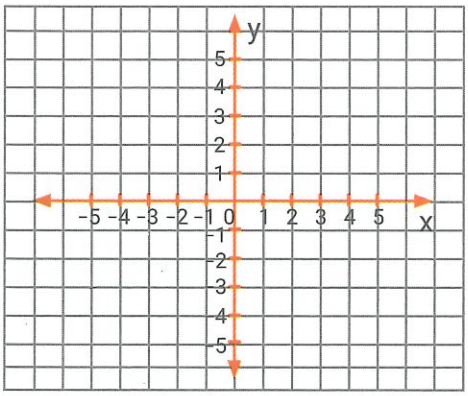
38. Escriban la ecuación explícita de las rectas T y S sabiendo que T // R y S ⊥ T. ¿Existe una única respuesta posible?

a. R: $y = 4(x - 1) + 2$

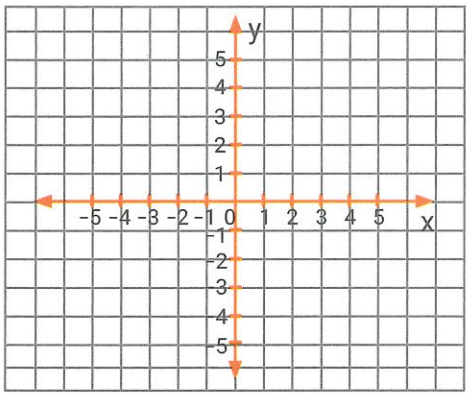
b. R: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-10} = 1$

39. Aproximen la gráfica de una recta de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ según la información dada.

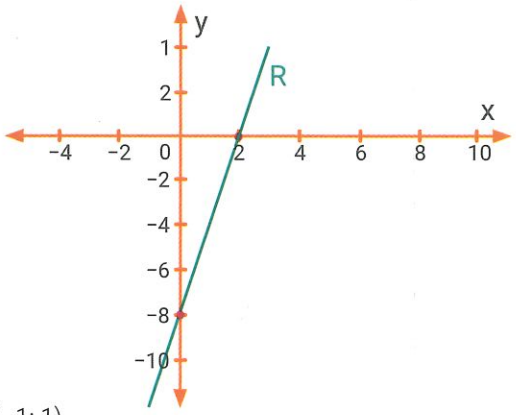
a. $a < 0$ y $b < 0$



b. $a > 0$ y $b < 0$



40. Observen el gráfico de la recta R y escriban la ecuación explícita y segmentaria de la recta pedida en cada caso.



a. Recta T // R que pasa por (−1; 1).

b. Recta S ⊥ R que pasa por la raíz de la recta T.

21. Función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

La **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado de la forma:

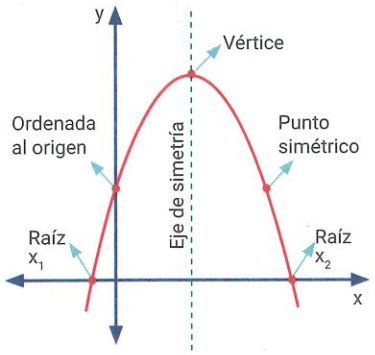
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (a, b, c son números reales y } a \neq 0)$$

Término cuadrático | Término lineal | Término independiente

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Elementos de la parábola

Raíces: puntos de intersección de la parábola con el eje "x".
Ordenada al origen: punto de intersección de la parábola con el eje "y".
Vértice: punto máximo o mínimo de la parábola.
Eje de simetría: recta paralela al eje "y" que pasa por el vértice de la parábola.



Para graficar la parábola se deben hallar:

• Las **raíces** o **ceros**: se iguala a cero la función f(x) = 0 y luego con los valores de "a", "b" y "c" se calculan mediante la siguiente fórmula resolvente.

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad$ Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

• Las coordenadas del **vértice** $v = (x_v; y_v)$.

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$ o $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad y_v = f(x_v)$

• La **ordenada al origen** (0; c).
$y = f(0) = c$

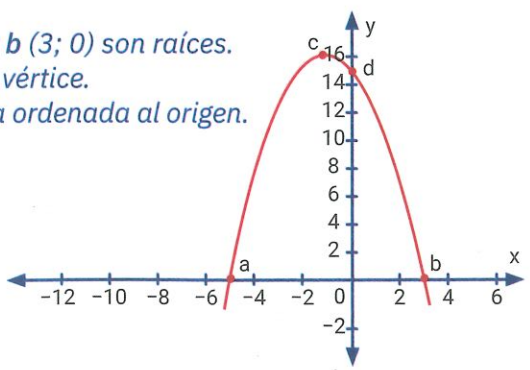
$f(x) = -x^2 - 2x + 15 \Rightarrow -x^2 - 2x + 15 = 0$ (donde $a = -1$, $b = -2$, $c = 15$)

$$\text{Raíces} \rightarrow x_{1;2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.(-1).15}}{2.(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} \dfrac{2+8}{-2} = -5 \\ \dfrac{2-8}{-2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{C_0 = \{-5; 3\}}$$

Vértice $v = (x_v; y_v) \Rightarrow x_v = -\dfrac{-2}{2.(-1)} = -1$; $y_v = f(-1) = -(-1)^2 - 2.(-1) + 15 = 16 \Rightarrow \boldsymbol{v = (-1; 16)}$

Ordenada al origen $\rightarrow y = f(0) = -0^2 - 2.0 + 15 \Rightarrow \boldsymbol{f(0) = 15}$

*Los puntos **a** (−5; 0) y **b** (3; 0) son raíces.*
*El punto **c** (−1; 16) es vértice.*
*El punto **d** (0; 15) es la ordenada al origen.*



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fcuadra * para mirar un video donde se explica cómo se grafica una parábola.

*Enlace acortado de https://youtu.be/xRq3feSSfyc

21. Función cuadrática

Formas de la función cuadrática	Ecuación	Información que brinda la ecuación	Ejemplo
Forma polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Coeficientes **a**, **b** y **c**	$f(x) = x^2 + 6x - 1$
Forma canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$	Coeficiente a y vértice $v = (x_v; y_v)$	$f(x) = 3(x - 1)^2 - 8$
Forma factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Coeficiente a y raíces x_1 y x_2	$f(x) = -4(x - 1)(x + 9)$

Se puede pasar de una forma a otra buscando los elementos necesarios y/o desarrollando las operaciones planteadas.

Polinómica $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$ → *se busca las raíces* $x_1 = -2$ *y* $x_2 = 4$ → *Factorizada* $f(x) = 2(x + 2)(x - 4)$

Factorizada $f(x) = 2(x + 2)(x - 4)$ → *se aplica propiedad distributiva* → *Polinómica* $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

Polinómica $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$ → *se busca el vértice* $v = (1; -18)$ → *Canónica* $f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$

Canónica $f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$ → *se aplica propiedad distributiva* → *Polinómica* $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

ACTIVIDADES

21. Función cuadrática

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cómo debe dar el discriminante cuando una parábola no corta al eje "x"?

b. ¿Es cierto que el vértice de una parábola puede ser raíz?

c. ¿Qué es necesario calcular para pasar de la forma canónica a la factorizada?

42. **Completen la tabla y, luego, grafiquen en sus carpetas.**

Función	Raíces	Vértice	Ordenada al origen	Eje de simetría
$f(x) = 3x^2 - 6x - 9$				
$f(x) = -x^2 + 4x - 4$				
$f(x) = 2x(x - 6)$				
$f(x) = 2(x - 6)^2 - 8$				
$f(x) = (x - 1)(x + 3)$				
$f(x) = 3x^2 + 3$				
$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$				

21. Función cuadrática

43. Unan con flechas los datos con la fórmula de la función cuadrática correspondiente.

a. $a = 5$ y raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$	• $f(x) = -(x + 1)^2$
b. Vértice $(1; 3)$ y $a = 4$	• $f(x) = 5 . (x + 3) . (x - 2)$
c. $C_0 = \{-2; 3\}$ y $a = 5$	• $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$
d. $a = -1$ y $x_1 = x_2 = -1$	• $f(x) = 5 . (x - 3) . (x + 2)$
e. $f(0) = 1$ y $a = 4$	• $f(x) = 4 . (x - 1)^2 + 3$

44. Completen la tabla.

Forma polinómica	Forma factorizada	Forma canónica
$f(x) = -x^2 - x + 2$		
	$f(x) = -2 . (x - 1) . (x + 7)$	
		$f(x) = (x + 2)^2 - 4$
$f(x) = 3x^2 - 6x + 3$		
	$f(x) = 3 . (x - 2) . (x + 2)$	
		$f(x) = (x - 3)^2 + 1$

45. Hallen la forma polinómica, canónica y factorizada de cada función cuadrática.

a. El coeficiente principal es 7 y tiene raíces en $x = 0$ y $x = 1$.

b. El coeficiente principal es -2 y tiene por vértice $v = (2; -1)$.

c. Las raíces son $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$ y corta al eje y en 1.

d. El vértice es $(-2; 2)$ y pasa por el punto $(0; 1)$.

21. Función cuadrática

46. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Todas las funciones cuadráticas tienen dominio $D_f = \mathbb{R}$. ☐

b. Todas las parábolas cortan al eje de las abscisas en dos puntos. ☐

c. Todas las parábolas tienen un punto que no tiene simétrico. ☐

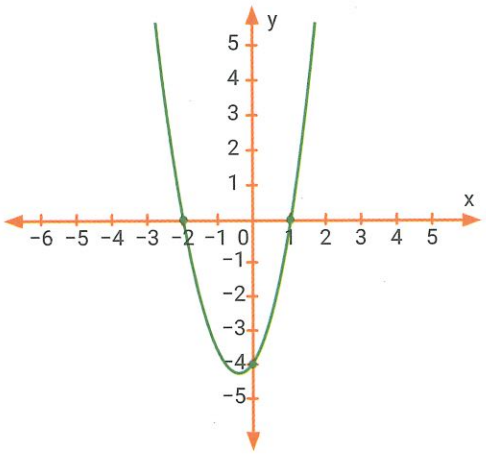
d. El vértice de la parábola es siempre el mínimo de la función. ☐

e. Cuando el discriminante es negativo, la gráfica de la parábola corta al eje x en un solo punto. ☐

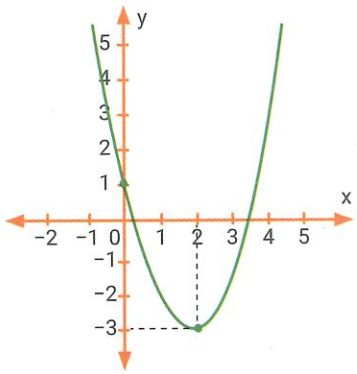
f. La fórmula de la parábola puede no tener término lineal. ☐

47. Hallen la fórmula correspondiente a cada gráfico en la forma más conveniente según los datos.

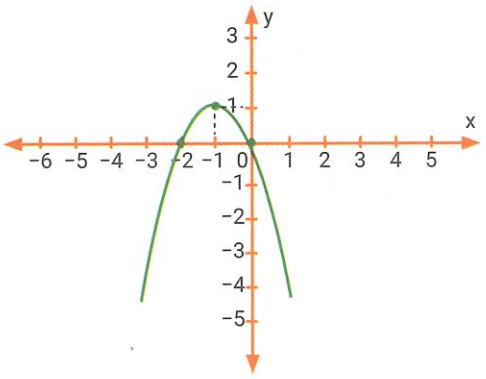
a.



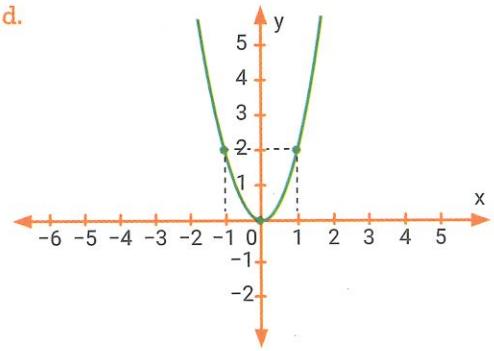
c.



b.



d.



22. Ecuaciones cuadráticas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde **a**, **b** y **c** son números reales y **a** es distinto de cero.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R};\ c \in \mathbb{R};\ a \neq 0$$

Ecuaciones cuadráticas incompletas

b = 0	c = 0	b = 0 ∧ c = 0
$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 0= 0$
$-3x^2 + 12 = 0$	$4x^2 - 8x = 0$	$7x^2 = 0$

Para resolver una ecuación cuadrática se aplica la fórmula: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	No tiene raíces reales

$4x^2 - 10x - 6 = 0$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -10 \\ c = -6 \end{cases}$

$$x_{1;2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.4.(-6)}}{2.4} = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{8} = \frac{10 \pm 14}{8} =$$

$$x_1 = \frac{10 + 14}{8} = 3 \wedge x_2 = \frac{10 - 14}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 3 \wedge x_2 = -\frac{1}{2}}$$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ $x_{1;2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = x_2 = -1}$

$3x^2 + x + 8 = 0$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 8 \end{cases}$ $x_{1;2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.3.8}}{2.3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-95}}{6} \Rightarrow$ ***No tiene raíces reales***

Cuando las ecuaciones son incompletas, se pueden resolver del siguiente modo:

b = 0	c = 0	b = 0 ∧ c = 0
$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 = 0$
Recordar: $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	Recordar: m . n = 0 → m = 0 ∨ n = 0	Recordar: 0 : a = 0
$2x^2 - 72 = 0$ $2x^2 = 72$ $x^2 = 72 : 2$ $x^2 = 36$ $\lvert x \rvert = \sqrt{36}$ $\lvert x \rvert = 6$	$4x^2 - 8x = 0$ $4x(x - 2) = 0$ $4x = 0$ o $x - 2 = 0$ $x = 0 : 4$ o $x = 2$ $x = 0$ o $x = 2$	$7x^2 = 0$ $x^2 = 0 : 7$ $x^2 = 0$ $\lvert x \rvert = \sqrt{0}$ $\lvert x \rvert = 0$
$\mathbf{x_1 = 6;\ x_2 = -6}$	$\mathbf{x_1 = 0;\ x_2 = 2}$	$\mathbf{x_1 = x_2 = 0}$

22. Ecuaciones cuadráticas

Test de comprensión

48. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En una ecuación cuadrática, ¿puede el valor del coeficiente "a" ser cero?

b. ¿Se puede resolver una ecuación cuadrática incompleta usando la fórmula resolvente?

c. ¿Es cierto que si en una ecuación cuadrática $c = 0$, entonces una de las raíces es siempre $x = 0$?

49. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + x = 10 - 2x$

b. $x^2 = 6x$

c. $(x - 3) . (x - 1) = 15$

d. $4x^2 + 25 = 20x$

e. $x^2 - 2 = 2 . (x + 5) + 3$

f. $\frac{x + 1}{2} + \frac{3x + 10x^2}{8} - \frac{5}{8} = \frac{x^2}{4}$

g. $(x + 1) . (2x + 2) + 9 = 0$

h. $(2x - 1)^2 = 1$

50. Planteen la ecuación y resuelvan.

a. El producto entre el anterior de un número y el siguiente del mismo número es igual al triple de 8. ¿Cuál es el número?

b. El área de un rectángulo es igual a 15 cm^2. Sabiendo que la altura es dos centímetros menos que la base, calcular el perímetro del rectángulo.

23. Función polinómica

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función polinómica** es una **función** cuya expresión algebraica es un polinomio.

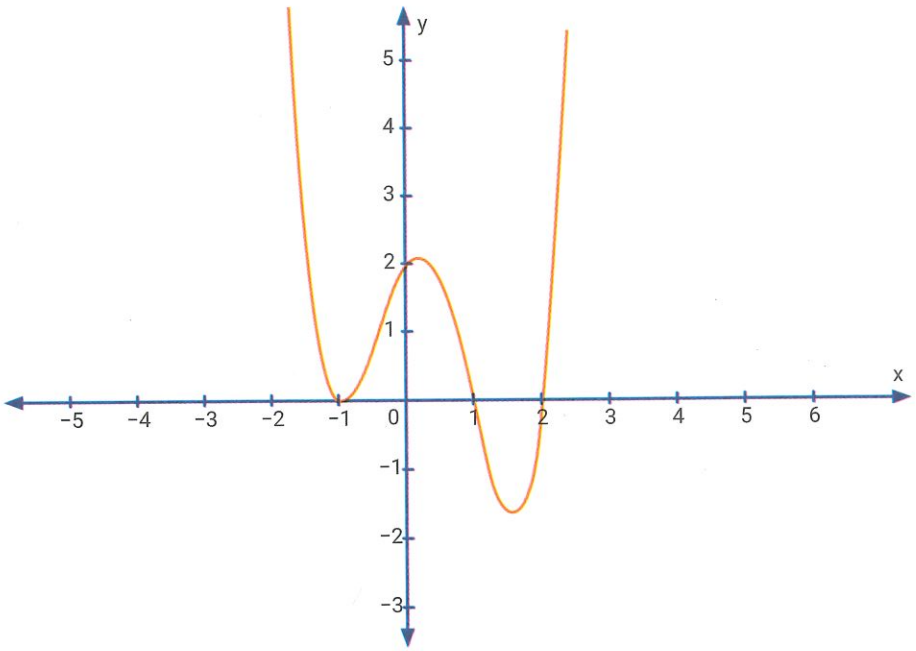
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(n es natural y a_n; a_{n-1} ... a_2; a_1; a_0 son números reales)

- El término $a_n x^n$ se llama término principal e indica el **grado** de la función polinómica.
- Una función polinómica tiene, a lo sumo, tantas **raíces** como el grado de la función.
- El **orden de multiplicidad** de una raíz es el número de veces que esa raíz se repite como tal.
- El término a_0 se llama **término independiente** e indica la ordenada al origen de la función.
- El **dominio** de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales ($D_f = \mathbb{R}$).
- Las funciones polinómicas son **continuas.**

$f(x) = (x + 1)^2 . (x - 1) . (x - 2)$ *$D_f = \mathbb{R}$* *$C_0 = \{-1; 1; 2\}$* *$f(0) = 2$*

doble simples



Se pueden hacer operaciones con funciones polinómicas:

- La suma de dos funciones polinómicas da como resultado otra función polinómica.
- El producto de dos funciones polinómicas da por resultado otra función polinómica.
- La composición de dos funciones polinómicas es igual a otra función polinómica.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fupoli* para mirar un video donde se explica qué es una función polinómica y se ofrecen diferentes ejemplos.

*Enlace acortado de https://youtu.be/pd7ZSI6w5Ig

ACTIVIDADES

23. Función polinómica

Test de comprensión

51. Respondan y expliquen sus respuestas.

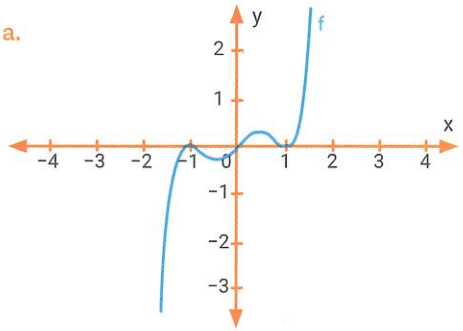
a. ¿Cuál es el grado de la función polinómica $f(x) = 3x - 6x^2 + x^5 - 5x^3$?

b. ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen de la función $g(x) = -(x - 2) \cdot (x + 3)$?

c. ¿Es cierto que las raíces de $h(x) = 2x \cdot (x - 4)^2$ son 2 y −4?

52. Tengan en cuenta los gráficos y completen con lo pedido en cada caso.

a.

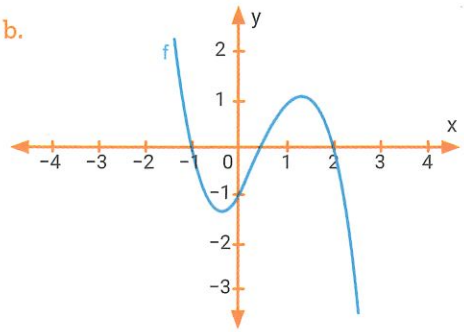


D_f = _____

C_0 = _____

f(0) = _____

b.



D_f = _____

C_0 = _____

f(0) = _____

53. Escriban una función polinómica que cumpla lo pedido en cada caso e indiquen si es la única posibilidad.

a. Coeficiente principal 8, $x_1 = -3$ (raíz doble) y $x_2 = 4$ (raíz simple).

_____

b. Coeficiente principal −6 y tres raíces pares consecutivas, todas de orden simple.

_____

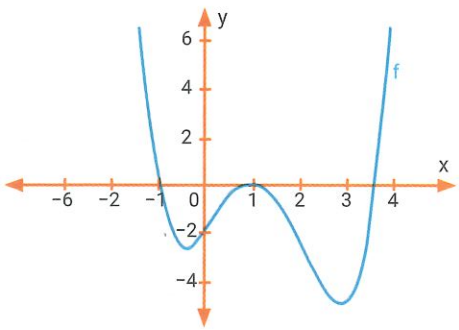
c. Tiene $C_0 = \{5; 7\}$, ambas dobles.

_____

d. Coeficiente principal 4, $x_1 = 0$ (raíz doble) y $x_2 = 9$ (raíz triple).

_____

54. Observen el gráfico y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.



a. $D_f = \{-1; 1; 3\}$ ☐

b. $f(0) = -1$ ☐

c. $f(-2) = 0$ ☐

d. −1 es raíz. ☐

e. $f(0) = -2$ ☐

24. Análisis de la función polinómica

▶ SABERES DINÁMICOS

Para graficar una función polinómica, dada su fórmula, es recomendable seguir los siguientes pasos:

- Factorizar el polinomio.
- Indicar las raíces y el orden de multiplicidad de cada una (si el orden de multiplicidad es par, la gráfica de la función rebota en el eje x. Si el orden de multiplicidad es impar, la gráfica de la función atraviesa el eje x).
- Hallar la ordenada al origen.
- Analizar el conjunto de positividad y negatividad.
- Graficar.

Para recordar pág. 83

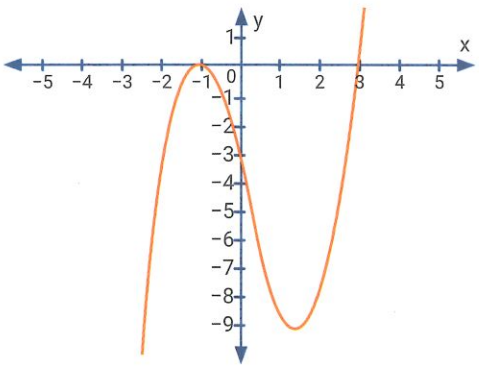
Al factorizar $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ (en este ejemplo se puede aplicar teorema de Gauss) se obtiene:

$$f(x) = (x + 1)^2 . (x - 3)$$

- *Sus raíces son:*
  - $x_1 = -1$ *(doble) → la gráfica rebota en el eje x*
  - $x_2 = 3$ *(simple) → la gráfica cruza el eje x*
- $f(0) = -3$
- *Análisis del signo de la función.*

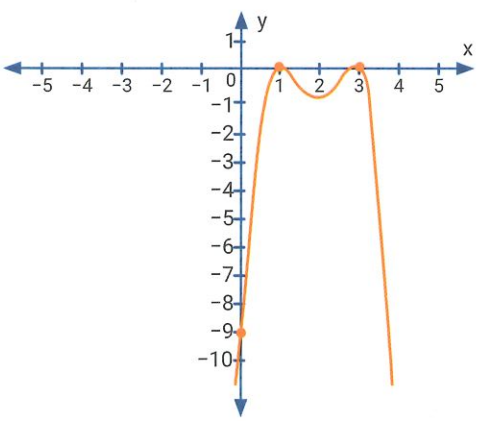
	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
Signo de f(x)	−	0	−	0	+

$C^+ = (3; +\infty)$ $C^- = (-\infty; -1) \cup (-1; 3)$



Para **reconstruir la fórmula** de una **función polinómica** se deben tener en cuenta los datos que se tienen. Estos pueden ser: raíces y multiplicidad, grado de la función, ordenada al origen, puntos de la gráfica, etc.

Reconstruyan la fórmula de la función graficada si f(x) es de grado 4.



En la gráfica se observa que rebota en ambas raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ (tienen multiplicidad par).
$f(x) = a . (x - 1)^2 . (x - 3)^2$

Para calcular el coeficiente "a" usamos el dato de la ordenada al origen $f(0) = -9$.
$-9 = a . (0 - 1)^2 . (0 - 3)^2$
$-9 = a . 1 . 9 \rightarrow a = -9 : 9 \rightarrow a = -1$

La fórmula de función es: $\boldsymbol{f(x) = -(x - 1)^2 . (x - 3)^2}$.

ACTIVIDADES

24. Análisis de la función polinómica

Test de comprensión

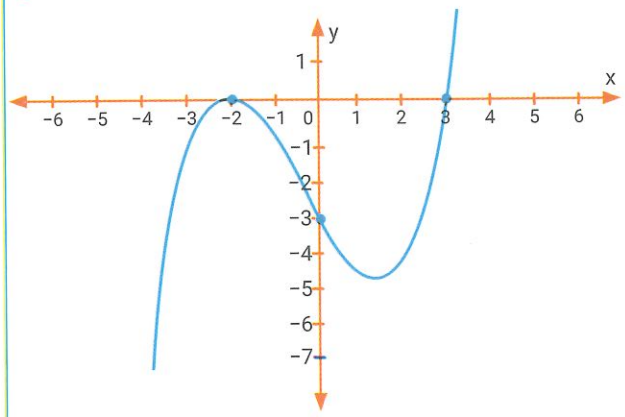
55. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que el grado de la función $f(x) = 2 \cdot (x - 4)^5 \cdot (x + 1)^2$ es 5?

b. ¿Es cierto que la función $f(x) = 3x \cdot (x^2 + 1)$ tiene por raíces 0 y −1?

c. Si una función tiene $C^+ = (-\infty; 4)$ y $C^- = (4; +\infty)$, ¿cuál es la raíz?

56. Observen el gráfico y completen sabiendo que f(x) es de grado 3.



a. $D_f =$ _____

b. Raíces: _____

c. Multiplicidad: _____

d. $f(0) =$ _____

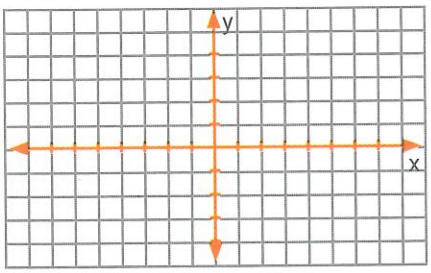
e. $C^+ =$ _____

f. $C^- =$ _____

g. $I_f =$ _____

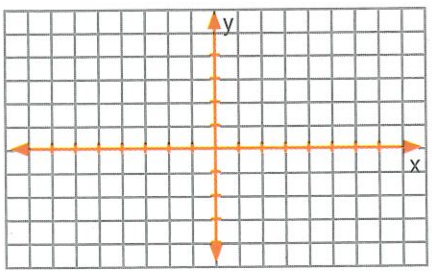
57. Realicen un gráfico aproximado según las condiciones dadas y luego escriban los intervalos de positividad y negatividad.

a. Tiene 3 raíces simples $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y cumple que $f(0) = -1$.



$C^+ =$ _____ $C^- =$ _____

b. Las raíces son $x_1 = 0$ (triple) $x_2 = 6$ (doble) y $f(1) = 5$.



$C^+ =$ _____ $C^- =$ _____

24. Análisis de la función polinómica

58. Indiquen el grado y las raíces con el orden de multiplicidad de cada función.

a. $f(x) = 3 . \left(x - \frac{1}{2}\right) . (x - 5)^2 . (x - 6)$

b. $f(x) = -2x . (x + 7) . (x + 0{,}5)^3 . (x + 9)^2$

c. $f(x) = (x - 2) . (x^4 + 16)$

d. $f(x) = -5 . (x - 2) . (x + 2) . (x - 6)$

59. Escriban la fórmula de una función polinómica que tenga raíces 2, −3, 5, −7. Comparen los resultados con sus compañeros y respondan si existe una única respuesta correcta.

60. Completen la tabla.

Función	Grado	Raíces	Rebota	Atraviesa	Ordenada al origen
$f(x) = 2x . (x - 8)^4$					
$f(x) = (x + 1)^2 . (x - 7)$					
$f(x) = (x + 2) . (x^2 + 4)$					
$f(x) = -4(x - 1)^6 (x - 3)$					

61. Expresen las siguientes funciones en forma factorizada.

a. $f(x) = 2x^3 - 14x^2 + 22x - 10$

b. $f(x) = -3x^4 + 3x^2$

c. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 12x - 16$

d. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

62. Lean atentamente y respondan.

Estudios meteorológicos han determinado que la temperatura de un cierto día en la ciudad de Callas (Francia) estaba dada por la función: $T(t) = \frac{1}{20} t . (t - 24) . (t - 12)$ donde "t" representa la hora del día y "T(t)" la temperatura en °C.

a. ¿Cuál fue la temperatura a las 6 de la mañana? ¿Y a las 13 h?

b. ¿Entre qué horas del día se registraron temperaturas bajo cero? ¿Y sobre cero?

c. ¿Cuál es el dominio de la función en el contexto del problema, teniendo en cuenta que la variable independiente es el tiempo "t"?

d. Realicen en sus carpetas un gráfico de T(t) para $0 \leq t \leq 24$.

24. Análisis de la función polinómica

63. Indiquen en cada caso: ordenada al origen, raíces, orden de multiplicidad, conjunto de positividad y negatividad. Luego, grafiquen en sus carpetas.

a. $f(x) = 3x^3 - 3x$

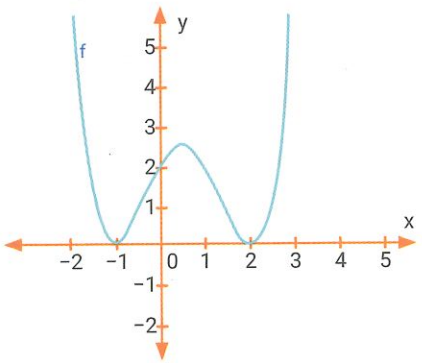
b. $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$

c. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - x + 6$

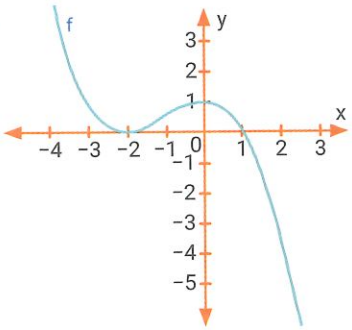
d. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

64. Reconstruyan la fórmula de menor grado de cada función graficada.

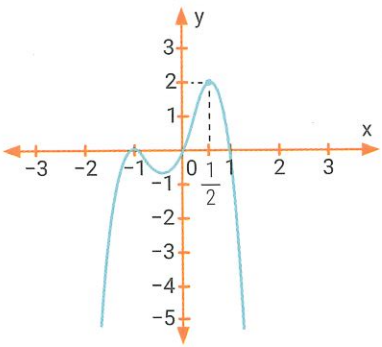
a.



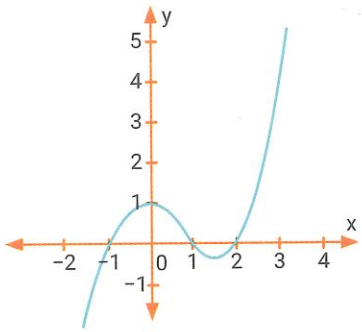
c.



b.



d.



DinámicaMente

Reconstruyan la fórmula de la función usando los datos dados. Luego, grafiquen en sus carpetas.

a. $C_0 = \{-3; 0; 3\}$ todas simples y $f(1) = 2$.

b. $C^+ = (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$, f es de grado 4 y su gráfica pasa por el punto (3; 1).

Integración final

65. Escriban la ecuación explícita de la recta según los datos dados y luego grafiquen.

a. Tiene pendiente −5 y pasa por el punto (1; 3).

b. Su ordenada al origen es −3 y su raíz es $\frac{3}{2}$.

c. Pasa por los puntos (3; 5) y (−6; 8).

d. Cumple que f(−2) = 9 y que f(4) = 3.

66. Tengan en cuenta las rectas R y T y completen con // (paralelas) o ⊥ (perpendiculares) según corresponda.

a. R: x + y = 8 ☐ T: y = −x + 11

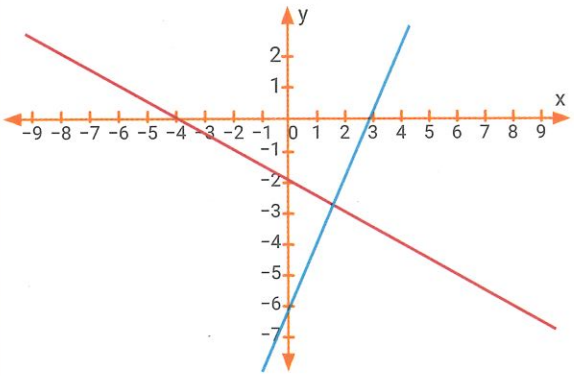
b. R: 5(y − x) = 10 ☐ T: 2y − 2x − 8 = 0

c. R: y = 3x ☐ T: $\frac{x}{3}$ + y = 0

d. R: 4 + y + 6x = 0 ☐ T: y = −6x + 3

e. R: y = x − 4 ☐ T: x + y + 8 = 0

67. Escriban la ecuación segmentaria de las rectas graficadas.



68. Escriban la ecuación de la recta pedida.

a. Recta R paralela a la recta y = 5x que pasa por el punto (1; 7).

b. Recta T perpendicular a $\frac{x}{2}$ + y = 1 cuya raíz es 3.

c. Recta M paralela a la recta que pasa por los puntos (8; 6) y (7; 7) que corta al eje y en 9.

d. Recta S que pasa por la raíz de la recta y = x + 2 y por la ordenada al origen de la recta 2(x + y) − 1 = 1.

69. Completen la tabla.

Forma polinómica	Forma canónica	Forma factorizada
$f(x) = x^2 + 3x - 10$		
	$g(x) = (x - 3)^2 - 1$	
		$h(x) = -(x-2)(x+6)$

70. Escriban la fórmula de la función cuadrática de la forma más conveniente según los datos dados.

a. Tiene vértice v = (−1; 6) y pasa por el punto (2; 33).

b. Tiene por raíces −1 y 2 y su ordenada al origen es 2.

c. Su coeficiente a = 2 y pasa por los puntos (1; 2) y (−1; 4).

d. Una de sus raíces es −2 y el vértice es (0; −4).

71. Hallen: dominio, raíces, vértice, ordenada al origen, eje de simetría, máximo o mínimo. Luego, grafiquen las parábolas e indiquen I_f; crecimiento y decrecimiento.

a. $f(x) = 2(x - 4)(x + 2)$

b. $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

c. $f(x) = 3(x + 3)^2 + 9$

d. $f(x) = -2x^2 - 7x - 12$

72. Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $(x + 1)^2 - (1 - 3x)^2 = 0$

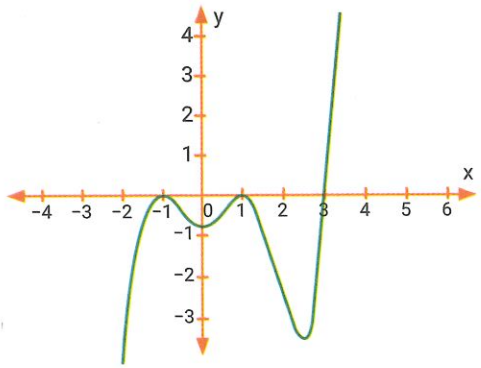
b. $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

c. $(x + 2)^2 = 580 - x^2$

d. $\frac{x - 1}{5} = \frac{3}{x + 1}$

e. $x \cdot (x - 3) - x^2 = x^2$

73. Observen el gráfico y completen con lo pedido.



a. D_f =

b. I_f =

c. C_0 =

d. C^- =

e. C^+ =

74. Expresen en forma factorizada las siguientes funciones, indiquen raíces con el orden de multiplicidad, ordenada al origen y, luego, grafiquen.

a. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

b. $g(x) = 2x^4 - 8x^2$

c. $h(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

d. $t(x) = -2x^3 + 6x^2 - 8$

75. Escriban la fórmula de una función polinómica que cumpla con las condiciones en cada caso.

a. Una función de grado 3, $x_1 = 1$; raíz doble, $x_2 = -2$; raíz simple y $f(0) = 3$.

b. Una función de grado 4, $x_1 = 2$; raíz doble, $x_2 = -1$; raíz doble y $f(1) = 2$.

c. Una función de grado 3, $x_1 = \frac{1}{2}$; raíz doble, $x_2 = -5$; raíz simple y $f(-2) = 4$.

76. Indiquen las raíces y el orden de multiplicidad.

a. $f(x) = (x + 2) . (x - 1)^3$

b. $f(x) = 7 . (x^4 + 2) . (x^2 + 1)$

c. $f(x) = -2 . (x - 3)^3 . (x + 7)$

d. $f(x) = x^2 . (x - 4) . (x - 6)$

77. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La recta de ecuación $y + x = 0$ es creciente. ☐

b. Las raíces de $f(x) = (x - 7)(x + 6)$ son -7 y 6. ☐

c. La imagen de $h(x) = -3x^2$ es $[0; +\infty)$. ☐

d. La ordenada al origen de $f(x) = x^3 - x + 8$ es 8. ☐

e. La función $g(x) = x(x - 5)^3$ es de grado 4. ☐

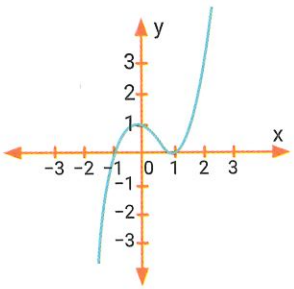
f. Las raíces de $t(x) = 4(x^2 + 1)$ son 4 y -1. ☐

g. La función cuadrática es una función polinómica. ☐

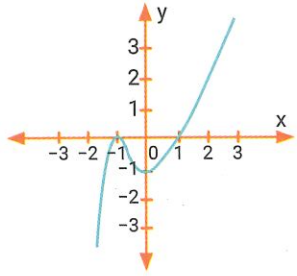
h. La función $f(x) = 2x^3 + x - 2$ es una función polinómica. ☐

78. Indiquen el número de gráfico que corresponde a cada función.

1



2



a. $f(x) = a . (x - 1)^3 . (x + 1)^2 \rightarrow$ gráfico: ☐

b. $g(x) = a . (x - 1)^2 . (x + 1) \rightarrow$ gráfico: ☐

79. Lean atentamente y respondan.

Una empresa fabrica cofres de hasta 1,5 m de arista cuyo costo está dado por:
$C(x) = 400x^3 + 800x^2 + 500x + 100$.
(x: longitud de la arista en metros)

a. ¿Cuál es el costo fijo?

b. ¿Cuál es el costo para fabricar un cofre de arista igual a 50 cm? ¿Y de 1 m?

c. ¿Cuál es el dominio en el contexto del problema?

d. Aproximen la gráfica de la función teniendo en cuenta el contexto del problema.

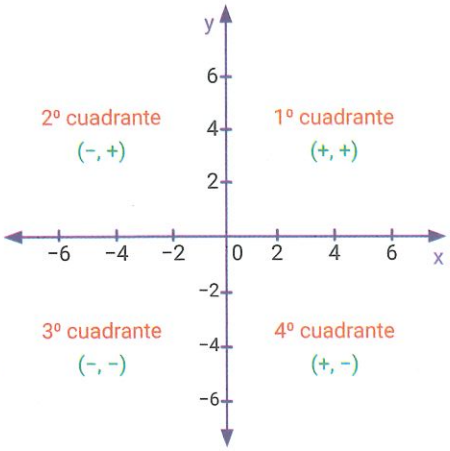
Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Sistema de coordenadas cartesianas

Un **sistema de coordenadas** cartesianas (llamado también ejes cartesianos) está formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado **origen de coordenadas**.
Dichos ejes dividen al plano en cuatro partes iguales y cada una de ellas recibe el nombre de cuadrante que se numeran en sentido antihorario.
El **eje horizontal** se llama **eje "x"** o **eje de abscisas.**
El **eje vertical** se llama **eje "y"** o **eje de ordenadas.**

Las **coordenadas de un punto** cualquiera P se representan por **(x, y).**



Factoreo de polinomios

Nombre	Procedimiento	Ejemplos
Factor común	El factor común es el m.c.d. entre los coeficientes y la variable con el menor exponente.	$2x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 2x^2 . (x^2 - 4x + 3)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$	$x^2 - 9 = (x - 3) . (x + 3)$
Cuadrática	$ax^2 + bx + c = a . (x - x_1) . (x - x_2)$ Se buscan las raíces x_1 y x_2 con la fórmula resolvente.	$2x^2 + 10x + 12 = 2(x + 3) . (x + 2)$
Teorema de Gauss	Si P(x), de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional p/q (fracción irreducible), entonces p es divisor del término independiente y q lo es del coeficiente principal.	$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ p: ± 1; ±2 q: ± 1 $\frac{p}{q} = \pm 1; \pm 2$ $P(1) = 0 \quad P(-1) = 0 \quad P(-2) = 0$ $P(x) = (x - 1) . (x + 1) . (x + 2)$
Normalizar	Tiene como propósito que el coeficiente principal sea 1; para ello se saca como factor común el coeficiente principal.	$5x - 2 = 5 . \left(x - \frac{2}{5}\right)$
Combinación de casos	Se aplican diferentes casos hasta que se termine de factorizar el polinomio.	$4x^3 - 36x =$ $4x . (x^2 - 9) =$ Factor común $4x . (x - 3) . (x + 3)$ Diferencia de cuadrados

4 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

80. ¿Cuál es el punto que corresponde a la ordenada al origen de la función $f(x) = 3 . (x - 1) + 6$?

◯ $(-1; 0)$ ◯ $(0; -1)$ ◯ $(3; 0)$ ◯ $(0; 3)$

81. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación explícita de recta que pasa por los puntos $(1; 2)$ y $(-3; -14)$?

◯ $y = -4x - 16$ ◯ $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ ◯ $y = 4x - 2$ ◯ $y = 2x - 4$

82. ¿Cuál es la recta paralela a la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$?

◯ $y = -2x + 7$ ◯ $y = 2x + 7$ ◯ $y = 0{,}5x + 3$ ◯ $y = -\frac{1}{2}x - 4$

83. ¿Cuáles son las raíces de la función $f(x) = 3x(x - 5)$?

◯ 3 y 5 ◯ 0 y 5 ◯ 0 y −5 ◯ 3 y −5

84. ¿Cuál es la función que tiene por vértice $(-1; 1)$?

◯ $y = 2x^2 + 4x + 3$ ◯ $y = (x - 1)^2 + 1$

◯ $y = (x + 1) . (x - 1)$ ◯ $y = 2x^2 - 4x - 3$

85. ¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 5 . (x - 1) - 3$?

◯ $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$ ◯ No tiene. ◯ $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{8}{5}$ ◯ $f^{-1}(x) = -5x + 8$

86. ¿Cuál es $f \circ g(x)$ siendo $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = 2x$?

◯ $f \circ g(x) = 4x^2 - 6x$ ◯ $f \circ g(x) = 2x^2 - 6x$

◯ $f \circ g(x) = 4x^2 - 3x$ ◯ Ninguna de las anteriores.

87. ¿Cuál es el intervalo de positividad de la función $g(x) = -(x - 1)^2 . (x + 2)^2$?

◯ $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ ◯ $(-2; 1)$

◯ $\emptyset$ ◯ $(-\infty; +\infty)$

88. ¿Cuál es la función polinómica que tiene por raíces $x_1 = 2$ (doble) y $x_2 = -1$ (simple) y $f(0) = 8$?

◯ $f(x) = 2x^2 - x + 8$ ◯ $f(x) = 2 . (x - 2)^2 . (x + 1)$

◯ $f(x) = 2 . (x + 2)^2 . (x - 1)$ ◯ $f(x) = 4x^2 + x - 8$

5 Funciones racionales

25. Expresión algebraica fraccionaria

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **expresión algebraica fraccionaria (o expresión algebraica racional)** es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son polinomios (expresiones algebraicas enteras) con $Q(x) \neq 0$.

$$\frac{x^4 - 3x + 1}{2x^2 + 6} \qquad \frac{-7x^3}{x + 5} \qquad \frac{5}{x^3 - 4x + 8}$$

Como el denominador debe ser distinto de cero, el **dominio de validez** de una expresión algebraica fraccionaria es el conjunto formado por todos los números reales, excepto aquellos valores que son raíces del denominador.

Dm = ℝ − {raíces del denominador}

Para recordar pág. 105

$\frac{x^2 + 5}{x - 3}$; $Dm = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad \frac{x^5 - 2x^2 + 4}{3x}$; $Dm = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad \frac{8}{x^2 - 1}$; $Dm = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ $\quad \frac{2x - 4}{x^4 + 16}$; $Dm = \mathbb{R}$

El dominio de validez se debe definir antes de comenzar a trabajar con la expresión.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

La simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias tiene por objeto reducir la expresión y poder resolver las operaciones de forma más sencilla.

Para **simplificar una expresión algebraica fraccionaria**, se deben factorizar los polinomios que forman el numerador y el denominador, y luego cancelar los factores comunes de ambos obteniendo así una expresión equivalente a la original.

$\frac{2x - 4}{3x - 6}$; $Dm = \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \frac{2.\cancel{(x - 2)}}{3.\cancel{(x - 2)}} = \frac{2}{3}$

$\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 3x}$; $Dm = \mathbb{R} - \{0; -3\} \rightarrow \frac{\cancel{x}.(x + 3).\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x}.\cancel{(x - 3)}} = x + 3$

Las expresiones algebraicas fraccionarias se pueden simplificar hasta convertirlas en irreducibles.

- Antes de cancelar los factores comunes, se debe definir el dominio de validez.
- Algunas expresiones algebraicas fraccionarias, al ser simplificadas, resultan equivalentes a expresiones algebraicas enteras.

ACTIVIDADES

25. Expresión algebraica fraccionaria

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que las expresiones $\frac{7}{x^3}$ y $\frac{x^3}{7}$ son algebraicas fraccionarias?

b. La expresión $\frac{x^2 - x}{x}$, ¿es irreducible?

c. ¿Es cierto que ninguna expresión algebraica fraccionaria tiene dominio de validez Dm = $\mathbb{R}$?

2. Marquen con una X las expresiones que no son expresiones algebraicas fraccionarias.

a. $\frac{x+1}{x+4}$ ☐

b. $\frac{x-3}{2}$ ☐

c. $\frac{\sqrt{x+5}}{x^3}$ ☐

d. $\frac{5}{x^2-3x+7}$ ☐

e. $\frac{1}{x-1}$ ☐

f. $\frac{x^4}{5}$ ☐

3. Definan el dominio de validez de cada expresión algebraica fraccionaria.

a. $\frac{3x}{2x-10}$ _____

b. $\frac{x^2}{x^2-36}$ _____

c. $\frac{2}{x^2+x}$ _____

d. $\frac{x-7}{8-x}$ _____

4. Simplifiquen las siguientes expresiones hasta obtener una irreducible.

a. $\frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$

b. $\frac{4x+8}{5x+10}$

c. $\frac{2x^4-2}{2x^3+4x^2-6x}$

d. $\frac{x^4-64}{x^3+8x}$

e. $\frac{3x+9}{x^2-2x-15}$

f. $\frac{3x+9}{3x^2+21x+36}$

26. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

▶ SABERES DINÁMICOS

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)} \wedge \frac{R(x)}{S(x)}$, $(Q(x) \neq 0 \wedge S(x) \neq 0)$ son equivalentes, si **P(x) . S(x) = Q(x) . R(x).**

$\frac{x+1}{x^2-3} \wedge \frac{x^2+x}{x^3-3x}$ *son equivalentes porque* $(x+1).(x^3-3x) = (x^2-3).(x^2+x)$

$$x^4 - 3x^2 + x^3 - 3x = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x$$

Para buscar **fracciones equivalentes** con un denominador común se busca el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores. El mcm se obtiene factorizando los denominadores y multiplicando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

$$\frac{x}{x^2-9} \wedge \frac{5}{x^2-6x+9} \rightarrow \frac{x}{(x-3).(x+3)} \wedge \frac{5}{(x-3)^2} \rightarrow \frac{x.(x-3)}{(x-3)^2.(x+3)} \wedge \frac{5.(x+3)}{(x+3).(x-3)^2}$$

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Para **sumar y/o restar** fracciones algebraicas de **iguales denominadores**, se coloca el mismo denominador y se resuelven las sumas y restas de los numeradores.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x-4}{x+2} = \frac{x+1-(2x-4)}{x+2} = \frac{-x+5}{x+2}$$

Para **sumar y/o restar** fracciones algebraicas de distintos denominadores, se buscan las fracciones equivalentes con denominador común y luego se resuelven las operaciones del numerador.

$$\frac{x-1}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x-1).(x-2)} + \frac{x}{(x-2).(x+2)}$$

$$= \frac{(x-1).(x+2)+x.(x-1)}{(x-1).(x-2).(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2-2}{(x-1).(x-2).(x+2)}$$ En este caso se puede factorizar el numerador y simplificar.

$$= \frac{2\cancel{(x-1)}.(x+1)}{\cancel{(x-1)}.(x-2).(x+2)} = \frac{2.(x+1)}{(x-2).(x+2)}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/sureEAF * para mirar un video con ejemplos explicados de suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias.

*Enlace acortado de https://youtu.be/_I6Xs2SXLXk

Para **multiplicar** fracciones algebraicas es recomendable seguir los siguientes pasos:

- Factorizar los numeradores y denominadores.
- Simplificar lo que sea posible.
- Multiplicar numeradores entre sí y denominadores entre sí.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)} \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \cdot \frac{3x+12}{x-1} = \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x+4)^2} \cdot \frac{3\cancel{(x+4)}}{\cancel{x-1}} = \frac{3(x+3)}{x+4}$$

Para **dividir** fracciones algebraicas, se debe multiplicar la primera fracción algebraica por la recíproca de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} \qquad \frac{x-5}{2x-14} : \frac{x^2-25}{x-7} = \frac{x-5}{2x-14} \cdot \frac{x-7}{x^2-25} = \frac{\cancel{x-5}}{2\cancel{(x-7)}} \cdot \frac{\cancel{x-7}}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{1}{2(x+5)}$$

Para resolver **operaciones combinadas** entre expresiones algebraicas fraccionarias se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- definir siempre el dominio de validez;
- separar en términos;
- simplificar cuando sea posible;
- resolver las multiplicaciones y divisiones; luego, las sumas y restas.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/opcoEAF * para mirar un video con un ejemplo explicado de operaciones combinadas con expresiones algebraicas fraccionarias.

*Enlace acortado de https://youtu.be/YvBwKjjIkcw

ACTIVIDADES

26. Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Test de comprensión

5. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que al resolver operaciones con fracciones algebraicas da por resultado una fracción algebraica?

b. Al transformar una división entre fracciones algebraicas en una multiplicación, ¿se puede invertir cualquiera de las fracciones?

c. ¿Es cierto que el denominador común de las fracciones $\frac{7}{x^2}$ y $\frac{x-4}{x^2-x}$ es $x^2.(x-1)$?

6. Resuelvan las siguientes sumas y restas y completen la tabla.

Operación	Dominio de validez	Resultado
$\frac{3x-2}{2x+1}+\frac{x-1}{2x+1}=$		
$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}-\frac{5}{x-1}=$		
$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{5x-1}{x^3+x^2}=$		

7. Resuelvan las multiplicaciones y divisiones.

a. $\frac{x^2+6x+9}{8x}\cdot\frac{x^2-5x}{x^2-2x-15}=$

b. $\frac{x^2-36}{x^3-6x^2}\cdot\frac{x^3}{x^2+7x+6}=$

c. $\frac{x^2-8x+16}{5x^2+20x}:\frac{3x-12}{3x+12}=$

d. $\frac{x^2}{2+x}:\frac{x^2}{4-x^2}=$

8. Lean atentamente y resuelvan.

Juan resolvió la siguiente operación combinada con expresiones algebraicas. Encuentren los errores y explíquenlos. Luego, comparen con un compañero.

$$\frac{x}{x+1}:\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{\cancel{x}}{x+1}:\frac{1}{\cancel{x}}+\frac{3}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1+3}{(x+1).(x-1)^2}$$

$$=\frac{4}{(x+1).(x-1)^2}$$

9. Resuelvan en la carpeta las siguientes operaciones combinadas.

a. $\frac{2}{x+3}+\frac{3x+3}{x^2-2x-8}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=$

b. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}\right):\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=$

27. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación con expresiones algebraicas fraccionarias** (o **ecuación racional**) es una ecuación formada por fracciones algebraicas.

Resolver una ecuación racional es encontrar las raíces del numerador que no anulan el denominador. Es decir, si alguna raíz del numerador coincide con algún valor excluido del dominio de validez, esta debe ser descartada, ya que no es solución de la ecuación planteada.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ es una ecuación racional}$$

Si x_1 es raíz de $P(x)$ y no es raíz de $Q(x)$, entonces x_1 es la solución de la ecuación $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

$\frac{2x}{x+1} = \frac{2x}{x-4}$ — Se define el dominio de validez: $Dm = \mathbb{R} - \{-1; 4\}$

$\frac{2x}{x+1} - \frac{2x}{x-4} = 0$

$\frac{2x(x-4) - 2x(x+1)}{(x+1)(x-4)} = 0$ — Se busca el denominador común y se resuelve.

$\frac{2x^2 - 8x - 2x^2 - 2x}{(x+1)(x-4)} = 0$

$\frac{-10x}{(x+1)(x-4)} = 0$

$-10x = 0 \rightarrow x = 0 : (-10) \rightarrow x = 0$ — Se iguala el numerador a 0 y se despeja "x". Luego, se verifica si el valor obtenido está excluido del dominio de validez.

Solución: x = 0

$\frac{x}{x-2} + \frac{2-3x}{x^2-2x} = 0$ — Se define el dominio de validez: $Dm = \mathbb{R} - \{0; 2\}$

$\frac{x}{x-2} + \frac{2-3x}{x(x-2)} = 0$ — Se busca el denominador común y se resuelve.

$\frac{x^2 + 2 - 3x}{x(x-2)} = 0$

$x^2 + 2 - 3x = 0$ — Se iguala el numerador a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática.

$x_1 = 1$

$x_2 = 2 \rightarrow$ *está excluido del Dm* — Se verifica si algún valor obtenido está excluido del dominio de validez.

La única solución de la ecuación es x = 1

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ecrac * para mirar un video con ejemplos explicados de ecuaciones racionales.

*Enlace acortado de https://youtu.be/JI8DNL_bZXA

ACTIVIDADES

27. Ecuaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Test de comprensión

10. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que todos los valores obtenidos al resolver una ecuación con expresiones algebraicas son siempre la solución de la ecuación?

b. ¿Es cierto que la ecuación $\frac{1}{x} = 0$ no tiene solución?

c. La ecuación $\frac{x+4}{x^2-4} = 0$ ¿tiene la misma solución que la ecuación $\frac{x+2}{x-2} = 0$?

11. Unan con flechas cada ecuación con su solución.

a. $\frac{x-9}{x^3} = 0$	• $x = 3$
b. $\frac{2}{x} - 1 = \frac{3}{x}$	• $x = 9$
c. $\frac{4}{x+1} = \frac{2}{x-1}$	• $x = 0$
d. $\frac{2x}{x+3} = 0$	• $x = -1$

12. Definan el dominio de validez y resuelvan las ecuaciones.

a. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

b. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5x-9}{x} = 5$

c. $\frac{5}{x+4} + \frac{x+2}{x^2+6x+8} = 0$

d. $\frac{2x}{x+3} + \frac{2}{x^2+3x} = \frac{1}{x}$

DinámicaMente

Tengan en cuenta las propiedades de la potenciación, definan el dominio de validez y resuelvan la ecuación.

$(x-1)^{-1} - x^{-1} = 6^{-1}$

13. Indiquen cuáles de las siguientes expresiones son fraccionarias.

a. $\frac{x}{2-x}$ ☐

b. $\frac{x^3-7x+1}{\sqrt{x}}$ ☐

c. $\frac{2x-5}{6}$ ☐

d. $\frac{\sqrt{3}}{x^5+2}$ ☐

14. Escriban el dominio de validez de cada fracción algebraica.

a. $\frac{6x}{3x-6}$

b. $\frac{4}{x^2+x+0{,}25}$

c. $\frac{x^3-6}{x^3-8x^2}$

d. $\frac{5x-10}{x^2+1}$

e. $1-\frac{3}{4-x}$

f. $\frac{x^5-7x}{x^2-4x+3}$

15. Escriban un ejemplo de una expresión algebraica fraccionaria que tenga el dominio de validez indicado en cada caso.

a. $Dm = \mathbb{R} - \{-5\}$

b. $Dm = \mathbb{R} - \{2; 7\}$

c. $Dm = \mathbb{R}$

d. $Dm = \mathbb{R} - \{6\}$

16. Indiquen cuáles de las siguientes expresiones son irreducibles.

a. $\frac{x+8}{4-x}$ ☐

b. $\frac{2}{4x}$ ☐

c. $\frac{x^2+1}{x}$ ☐

d. $\frac{2x^2+8x-10}{x^2-25}$ ☐

17. Simplifiquen las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias.

a. $\frac{x^3+4x^2+4x}{x^3+x^2-2x} =$

b. $\frac{x^4-1}{5x^2+5} =$

c. $\frac{-x^2+5x+14}{x^2-5x-14} =$

18. Resuelvan las siguientes multiplicaciones.

a. $\frac{x^2+6x}{x^3} \cdot \frac{3x^2}{x^2-36} =$

b. $\frac{x+2}{x^2+3x+2} \cdot \frac{3x^2+3x}{x^2-4} =$

c. $\frac{x^3+4x^2-5x}{x^3+x^2+2x+2} \cdot \frac{x^2+2}{x^2+10x+25} =$

d. $\frac{x^3+3x^2}{6x^2+12x} \cdot \frac{7x^2-28}{x^2-9} =$

e. $\frac{x^2-3}{x^2-5x+6} \cdot \frac{4x^4-8x^3}{x^3-x^2-3x+3} =$

19. Resuelvan las siguientes divisiones.

a. $\frac{5x-10}{x^2-4} : \frac{20x}{x+2} =$

b. $\frac{x^2+x-30}{5x^3+3x^2} : \frac{x^2-25}{x^4+11x^3+30x^2} =$

c. $\frac{x^3-13x^2+40x}{x^3-x^2-6x} : \frac{x^2-64}{x^3-3x^2} =$

d. $\frac{x^3-3x^2+4}{x^6+3x^5-10x^4} : \frac{7x^2-63}{x^4-81} =$

e. $\frac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-25x-25} : \frac{x^2+x-2}{x^2-25} =$

f. $\frac{-x^2+5x+14}{2} : \frac{x^2-5x-14}{2x+6} : (x+3) =$

20. Completen la tabla.

P(x)	Q(x)	P(x) . Q(x)
$\frac{x^3-5x^2}{3-x}$	$\frac{x-3}{x^2-5x}$	
	$\frac{2x^2-12x}{4x}$	$\frac{x-6}{x}$
$\frac{x^2+x}{x^2-1}$		$\frac{1}{x}$
$\frac{x^2-3x-4}{x}$	$\frac{x+3}{x^3-4x^2-x+4}$	
	$\frac{3x^2+9x}{x^2-1}$	$\frac{x+3}{x}$

21. Resuelvan las siguientes sumas y restas con igual denominador.

a. $\frac{3x+20}{x+5}+\frac{x}{x+5}=$

b. $\frac{x^2-8}{x+3}-\frac{1}{x+3}=$

c. $\frac{x^2-8}{x^4-16}-\frac{-4}{x^4-16}=$

d. $\frac{2x+6}{x+1}-\frac{x+4}{x+1}=$

22. Completen la tabla.

P(x)	Q(x)	P(x) + Q(x)
$\frac{x}{x+6}$	$\frac{x-3}{x+6}$	
	$\frac{2}{3x}$	$\frac{5}{3x}$
$\frac{x^2-4x}{x^2-1}$		$\frac{x^2-6}{x^2-1}$
$\frac{3x}{x-2}$	$\frac{x}{x^2-4}$	
$\frac{2x}{x+2}$	$\frac{2x^3}{4x^3+8x^2}$	

23. Resuelvan las siguientes sumas y restas.

a. $x+\frac{1}{x+3}=$

b. $\frac{2x-8}{x+5}-\frac{x}{x^2-25}=$

c. $\frac{x^2}{x+1}-1=$

d. $\frac{3x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=$

e. $\frac{1}{2}-\frac{2x}{2x^2-2x-12}=$

f. $\frac{3}{6-x}+\frac{1}{x+6}=$

24. Escriban una suma o una resta entre expresiones algebraicas racionales, cuya simplificación dé el resultado indicado en cada caso.

a. $\frac{x+4}{x}$

b. $\frac{x-3}{x+5}$

c. $\frac{x}{x+2}$

d. $\frac{2x}{x+4}$

e. $x+2$

f. $\frac{x}{x-4}$

25. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{2x^3}{2x^2-8}-1=$

b. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{5}{x+1}:(x-1)=$

c. $\frac{x^3}{x^4-2x^3}:\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}=$

d. $\left(\frac{x}{x-1}+x\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)+2=$

e. $\frac{x+3}{2x}:\frac{2x+6}{x}-\frac{1-x}{x}=$

f. $\frac{x^2+6x+9}{x+3}:(x+3)-\frac{x}{x+3}=$

g. $\frac{(x+1)^2}{x-3}:\frac{x^2-1}{x^4-81}\cdot\frac{2x}{x^2+12x+27}-3x=$

h. $\frac{4x-8}{x}:(x-2)-\frac{x-1}{x^2-4}:\frac{x+1}{x+2}=$

i. $2x+\frac{x^2-2x-5}{6x^2+8x-30}:\frac{2x^2-4x-10}{x+3}=$

j. $\frac{x^4+x^3}{x^4-3x^3}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^5+x^6}-\frac{x}{x+1}=$

26. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{8}{x+2}=5$

b. $\frac{5}{x-1}+\frac{2x}{x^2-x}=\frac{1}{x}$

c. $\frac{3x^2+9x}{x+3}+\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}$

d. $\frac{4-x}{x}-\frac{10x}{5x}=0$

e. $\frac{x-4}{x}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{2x+8}{x^2-16}$

f. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}+\frac{2x+4}{x^2+5x+6}=\frac{2x-1}{x+2}$

g. $\frac{6x-2}{x^2+6x}+\frac{2x-1}{x^2-36}=\frac{3}{x}$

h. $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x-3}{x-3}=3$

i. $\frac{x-3}{x+2}=\frac{x+5}{x^2+4x+4}$

j. $\frac{3x+2}{6x+4}:\frac{1}{2x}=-\frac{2x-1}{x+2}$

27. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La ecuación $\frac{3}{x}=0$ no tiene solución. ☐

b. La ecuación $\frac{x+4}{5}=\frac{3-x}{9}$ es racional. ☐

c. $x=2$ es solución de $\frac{x-2}{x+2}=0$. ☐

d. $x=0$ es solución de $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}=0$. ☐

28. Función racional

▶ SABERES DINÁMICOS

Una función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) polinomios y Q(x) ≠ 0, es una **función racional**.

$f(x) = \frac{2x}{x^3 - 7}$ $\quad g(x) = \frac{x + 8}{5 - x}$ *son funciones racionales.*

Como el denominador de la función racional debe ser distinto de cero, para calcularlo se iguala el denominador a 0 y se hallan los valores de x (que son los valores que no puede tomar x). El dominio es el conjunto de los reales menos los valores de x encontrados.

Dm = ℝ − {raíces de Q(x)}

Para recordar pág. 105

$f(x) = \frac{x + 9}{x^2 - 25}$ → Se iguala a 0 el denominador y se halla "x" → $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x = \pm 5$

→ Dm = ℝ − {−5; 5}

$g(x) = \frac{8}{3x}$ → Se iguala a 0 el denominador y se halla "x" → $3x = 0 \rightarrow x = 0$ → ***Dm = ℝ − {0}***

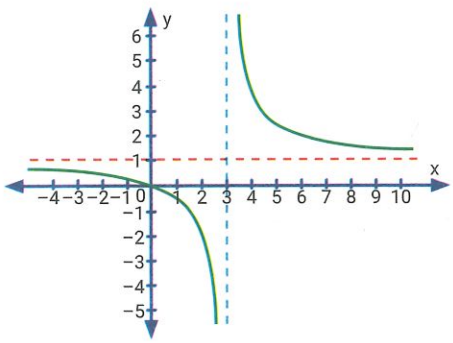
Asíntotas

Las funciones racionales tienen asíntotas. La asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se aproxima continuamente; es decir que la distancia entre las dos tiende a ser cero.

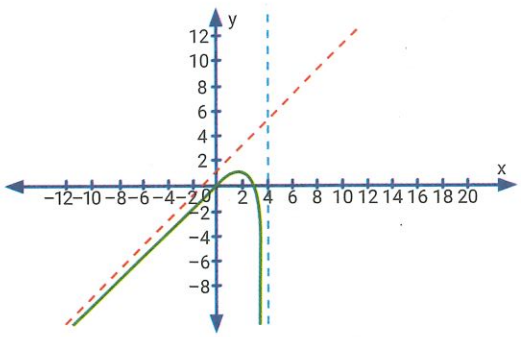
- **Asíntota vertical:** habrá una asíntota vertical (A.V.) en el valor excluido del dominio que no sea también raíz del numerador.
- **Asíntota horizontal:** para determinar la ecuación de una asíntota horizontal (A.H.) se deben comparar los grados de los polinomios numerador y denominador:

- Si el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x), la asíntota horizontal es y = 0
- Si el grado de P(x) es igual que el grado de Q(x), la asíntota horizontal es $y = \frac{\text{coef. ppal. de P(x)}}{\text{coef. ppal. de Q(x)}}$
- Si el grado de P(x) es mayor que el grado de Q(x), no hay asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua:** habrá una asíntota oblicua (A.O.), si no hay A.H. y si el grado del numerador menos el grado del denominador es igual a 1. La ecuación de la A.O. será el cociente de P(x) : Q(x).



$f(x) = \frac{x}{x - 3}$ tiene A.V.: x = 3; A.H.: y = 1



$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$ tiene A.V.: x = 4; A.O.: y = x + 1

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/asint * para mirar un video con ejemplos explicados de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

*Enlace acortado de https://youtu.be/fuvLZau_K5E

ACTIVIDADES

28. Función racional

Test de comprensión

28. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Sabiendo que $f(x) = \frac{2x-5}{7}$ y $g(x) = \frac{7}{2x-5}$, ¿cuál corresponde a una función racional?

b. Es cierto que el dominio de $f(x) = \frac{1}{x-4}$ es $Dm = \{4\}$?

c. Si una función racional tiene una asíntota horizontal, ¿puede tener asíntota oblicua?

29. Hallen el dominio de cada función.

a. $f(x) = \frac{8}{x+2}$

b. $f(x) = \frac{x+9}{5-x}$

c. $f(x) = \frac{2x+8}{x^2-36}$

d. $f(x) = \frac{1}{5x}$

e. $f(x) = \frac{x+6}{x^2+4}$

f. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+7x+10}$

30. Inventen la fórmula de una función racional que tenga el dominio dado en cada caso.

a. $Dm = \mathbb{R} - \{0,5\}$

b. $Dm = \mathbb{R} - \{-9\}$

c. $Dm = \mathbb{R}$

d. $Dm = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

31. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. $f(x) = \frac{x^{0,5}}{x+11}$ es una función racional. ☐

b. La función $g(x) = \frac{x-1}{4x^2}$ tiene asíntota oblicua. ☐

c. La ecuación de la A.V. de la función $f(x) = -\frac{8}{x}$ es $y = 0$. ☐

d. La función $h(x) = \frac{x+3}{x^2+25}$ no tiene A.V. ☐

32. Completen lo pedido para cada función.

Función	Dominio	A.V.	A.H.	A.O.
$f(x) = \frac{7}{2x+8}$				
$g(x) = \frac{2x^2-14x}{x-5}$				
$h(x) = \frac{10x+6}{5x-15}$				
$j(x) = 2 + \frac{x-1}{x+7}$				

29. Representación gráfica de funciones racionales

▶ SABERES DINÁMICOS

Para representar una función racional, se deben seguir estos pasos:

1. Se determina el conjunto dominio.
2. Se simplifica la expresión, si es posible.
3. Se hallan las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas del punto excluido, si tiene.
4. Se hallan distintos puntos de la función, entre ellos los puntos de intersección con los ejes.
5. Se grafica.
6. Se determina el conjunto imagen.

Para recordar pág. 105

Luego, se puede completar con el análisis de la función, indicando conjuntos de positividad y negatividad, conjuntos de crecimiento y decrecimiento.

$f(x) = \frac{6x - 12}{3x + 3}$

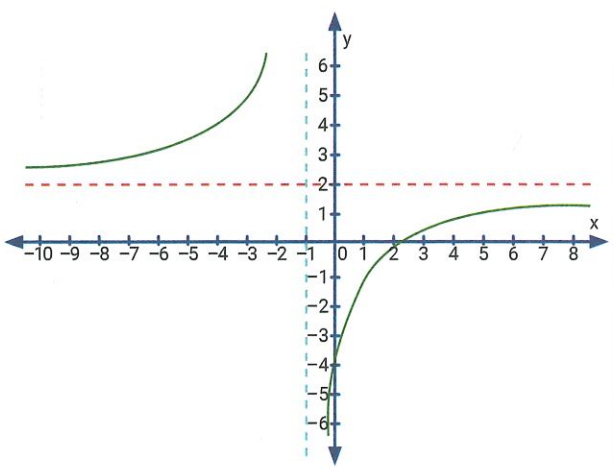
Dominio: $3x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow$ ***Dm = ℝ − {−1}***

A.V. en x = −1

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador: ***A.H. en*** $y = \frac{6}{3} \rightarrow$ ***y = 2***

Ordenada al origen: $f(0) = \frac{6.0 - 12}{3.0 + 3} \rightarrow$ ***f(0) = −4***

Raíz: $\frac{6x - 12}{3x + 3} = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{12}{6} \rightarrow$ ***x = 2***



Im = ℝ − {2}

C⁺ = (−∞; −1) U (2; +∞) ***C⁻ = (−1; 2)***

C↗ = (−∞; −1) U (−1; +∞) ***C↘ = Ø***

$g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

Dominio: $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 2$

Dm = ℝ − {−2; 2}

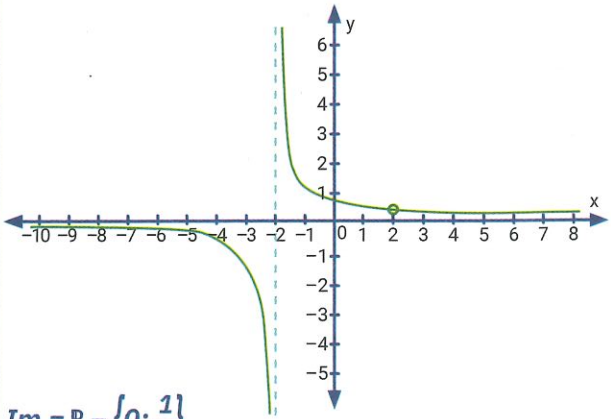
$g(x) = \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} \rightarrow g(x) = \frac{1}{x + 2}$

A.V. en ***x = −2*** *y punto excluido en* $\left(2; \frac{1}{4}\right)$

Como el grado del numerador es menor al grado del denominador: ***A.H. en y = 0***

Ordenada al origen: $g(0) = \frac{1}{0 + 2} \rightarrow$ ***f(0) =*** $\frac{1}{2}$

Raíz: $\frac{1}{x + 2} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ ***No tiene raíz***



Im = $\mathbb{R} - \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$

C⁺ = (−2; 2) U (2; +∞) ***C⁻ = (− ∞; −2)***

C↘ = (−∞; −2) U (−2; 2) U (2; +∞) ***C↗ = Ø***

ACTIVIDADES

29. Representación gráfica de funciones racionales

Test de comprensión

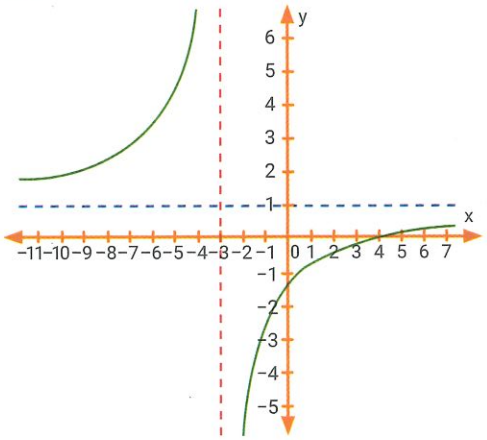
33. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que las gráficas de todas las funciones racionales cortan al eje "y"?

b. ¿Es cierto que las gráficas de algunas funciones racionales no cortan al eje "x"?

c. ¿Es cierto que el punto (1; 0) pertenece a la gráfica de $f(x) = \frac{2x - 2}{x - 1}$?

34. Observen los gráficos y completen.



a. Dm = _____

A.V. = _____

A.H. = _____

C_0 = _____

f(0) = _____

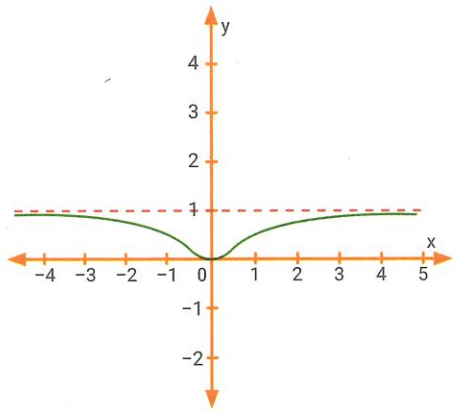
Im = _____

C^+ = _____

C^- = _____

$C^{\nearrow}$ = _____

$C^{\searrow}$ = _____



b. Dm = _____

A.V. = _____

A.H. = _____

C_0 = _____

f(0) = _____

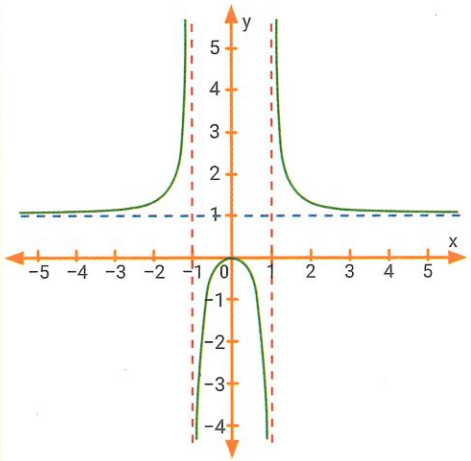
Im = _____

C^+ = _____

C^- = _____

$C^{\nearrow}$ = _____

$C^{\searrow}$ = _____



c. Dm = _____

A.V. = _____

A.H. = _____

C_0 = _____

f(0) = _____

Im = _____

C^+ = _____

C^- = _____

$C^{\nearrow}$ = _____

$C^{\searrow}$ = _____

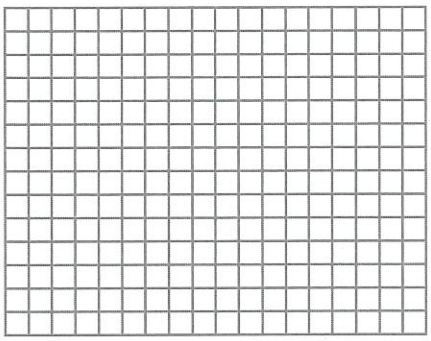
29. Representación gráfica de funciones racionales

35. Completen la tabla.

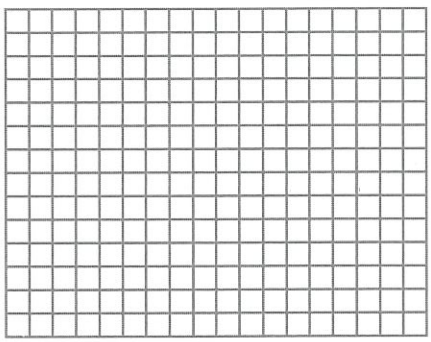
Función	$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$g(x) = \frac{-x}{x^3 + 1}$	$t(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$	$h(x) = \frac{2}{x^4 + 1}$
Dominio				
Expresión simplificada				
A.V.				
A.H.				
Punto excluido				
Raíces				
Ordenada al origen				

36. Hallen los elementos necesarios y grafiquen las siguientes funciones.

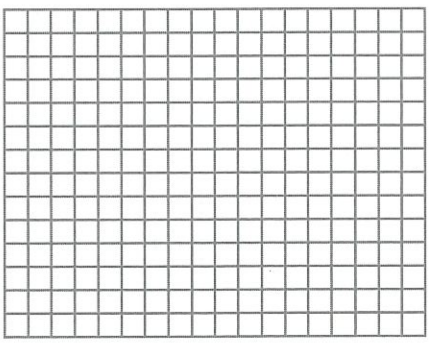
a. $g(x) = \frac{4x - 1}{4x}$



b. $h(x) = \frac{x}{x^2 + 3x}$



c. $j(x) = \frac{6}{1 - x}$



29. Representación gráfica de funciones racionales

37. Escriban V (verdadero) o F (falso), sabiendo que $f(x) = \frac{-2 - x + x^2}{x^2 + x - 6}$. Expliquen las respuestas.

a. La función f(x) tiene una asíntota vertical en x = 2. ☐ _____

b. La función no tiene asíntota horizontal. ☐ _____

c. La función cumple que $f(0) = -\frac{1}{3}$. ☐ _____

d. El punto (0; −1) es la raíz de la función. ☐ _____

e. El dominio de f(x) es $\mathbb{R} - \{-6\}$. ☐ _____

38. Completen con siempre, a veces o nunca, según corresponda.

a. La gráfica de una función racional cuya asíntota horizontal es y = 0 ☐ corta al eje x.

b. ☐ es necesario definir primero el dominio de una función racional.

c. Los valores excluidos del dominio en una función racional ☐ son coordenadas de puntos que pertenecen a la gráfica de la función.

d. Las funciones racionales ☐ no tienen asíntotas verticales.

e. Las funciones racionales ☐ tienen dos asíntotas verticales.

39. Inventen la fórmula de una función racional que cumpla lo pedido en cada caso. Luego, comparen con las fórmulas inventadas por sus compañeros y discutan qué tuvieron en cuenta.

a. Que tenga una asíntota vertical en x = 6 y una asíntota horizontal en y = −2. _____

b. Que no tenga asíntota vertical y tenga asíntota horizontal en y = 1. _____

c. Que tenga asíntota vertical en x = 0 y no tenga asíntota horizontal. _____

d. Que tenga una asíntota vertical en x = −7 y punto excluido en x = −1. _____

40. Reúnanse con un compañero y respondan.

La siguiente fórmula describe la temperatura T (°C) de una sustancia en función del tiempo transcurrido t (en minutos).

$$T(t) = 20 + \frac{30}{t + \frac{1}{4}}$$

a. ¿Cuál es la temperatura inicial? _____

b. ¿Cuál es la temperatura al cabo de 60 segundos? _____

c. ¿Cuánto tiempo transcurrió para que la temperatura llegue a los 32 °C? _____

d. ¿Cuál es la menor temperatura a la que puede llegar? ¿Cómo lo explicarían en términos gráficos?

_____

e. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto del problema? _____

f. Grafiquen en sus carpetas la función para su dominio.

30. Función homográfica

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen algunos casos particulares dentro de las funciones racionales.

Función de proporcionalidad inversa	Función homográfica
$f(x) = \frac{k}{x}$; $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0$	$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(c \neq 0)$
$Dm = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad Im = \mathbb{R} - \{0\}$	$Dm = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ $\quad Im = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
Asíntota vertical en: $x = 0$ Asíntota horizontal en: $y = 0$	Asíntota vertical en: $x = -\frac{d}{c}$ Asíntota horizontal en: $y = \frac{a}{c}$
$f(x) = \frac{2}{x}$ $Dm = \mathbb{R} - \{0\}$; A.V. en $x = 0$ $Im = \mathbb{R} - \{0\}$; A.H. en $y = 0$	$f(x) = \frac{4x + 6}{2x - 8}$ $Dm = \mathbb{R} - \{4\}$; A.V. en $x = 4$ $Im = \mathbb{R} - \{2\}$; A.H. en $y = 2$

Representación gráfica

Para representar una función homográfica, se debe:

1. Determinar los conjuntos dominio e imagen.
2. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas.
3. Determinar el punto de intersección con el eje y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{b}{d}$.
4. Encontrar el punto de intersección con el eje x: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

$f(x) = \frac{4x - 6}{2x + 8} \rightarrow a = 4;\ b = -6;\ c = 2;\ d = 8$

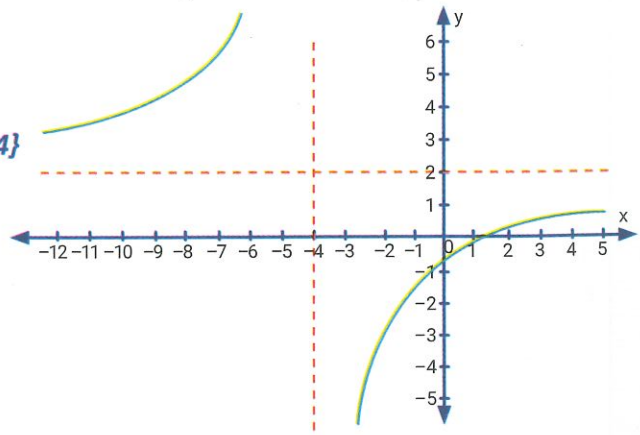
$Dm = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow Dm = \mathbb{R} - \left\{-\frac{8}{2}\right\} \rightarrow \mathbf{Dm = \mathbb{R} - \{-4\}}$

$Im = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\} \rightarrow Im = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{2}\right\} \rightarrow \mathbf{Im = \mathbb{R} - \{2\}}$

A.V.: $x = -4$; A.H.: $y = 2$

$0 = \frac{4x - 6}{2x + 8} \rightarrow 0 = 4x - 6 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow$ **Raíz** $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

$f(0) = \frac{4 \cdot 0 - 6}{2 \cdot 0 + 8} = \frac{-6}{8} \rightarrow f(0) = -\frac{3}{4} \rightarrow$ **Ord. origen** $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$



Áreas dinámicas [Matemática y Química]

Existen varias aplicaciones de las funciones racionales. Por ejemplo, en química la fórmula para encontrar la densidad de una sustancia es $D = \frac{m}{v}$, en donde D es la densidad, m es la masa del objeto y v es el volumen del objeto.

ACTIVIDADES

30. Función homográfica

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que $f(x) = \frac{x+2}{3+\sqrt{2}}$ es una función homográfica?

b. Si $f(x) = \frac{x}{5}$ y $g(x) = \frac{5}{x}$, ¿cuál corresponde a una función de proporcionalidad inversa?

c. ¿Es cierto que la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \frac{4-x}{x+9}$ es $y = 1$?

42. Completen la tabla.

Función homográfica	Dominio	Asíntota vertical	Asíntota horizontal
$f(x) = \frac{10x+7}{2x-6}$			
$g(x) = \frac{6x-3}{x+1}$			
$h(x) = \frac{-14x+4}{2x+8}$			
$j(x) = \frac{7-x}{5x-6}$			

43. Escriban dos ejemplos de una fórmula de la función homográfica que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Asíntota vertical en $x = 7$ y asíntota horizontal en $y = 4$.

b. Dm = $\mathbb{R} - \{7\}$ y asíntota horizontal en $y = -2$.

c. Asíntota vertical en $x = -2$ y asíntota horizontal en $y = -1$.

d. Dm = $\mathbb{R} - \{8\}$ e Im = $\mathbb{R} - \{5\}$.

44. Observen el gráfico y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas en sus carpetas.

a. $x = 3$ es A.V. ☐

b. $f(0) = -2$ ☐

c. Dm = $\mathbb{R} - \{1\}$ ☐

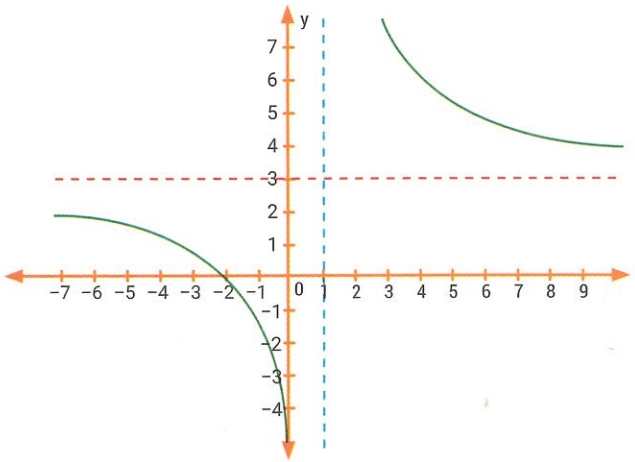
d. $y = 3$ es A.H. ☐

e. Raíz = $(0; -2)$ ☐

f. Im = $\mathbb{R} - \{3\}$. ☐

g. $C^+ = (-2; 1)$ ☐

h. $C^- = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ ☐



30. Función homográfica

45. Completen lo pedido en cada caso. Luego, grafiquen las funciones.

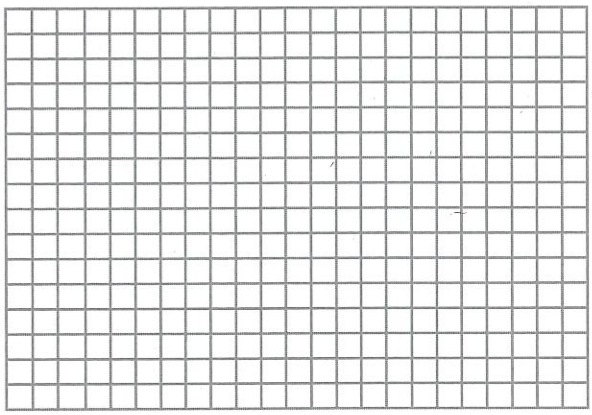
a. $f(x) = \frac{4x - 12}{2x + 4}$

Dominio: _____

Imagen: _____

Ecuación de las asíntotas: _____

Intersección con los ejes: _____



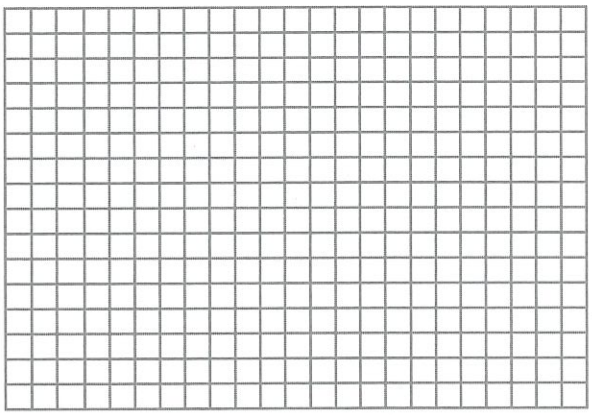
b. $f(x) = \frac{-x + 3}{x - 6}$

Dominio: _____

Imagen: _____

Ecuación de las asíntotas: _____

Intersección con los ejes: _____



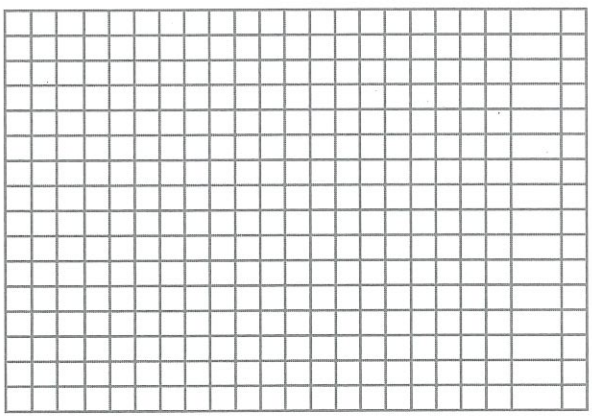
c. $f(x) = \frac{8 + 2x}{x + 2}$

Dominio: _____

Imagen: _____

Ecuación de las asíntotas: _____

Intersección con los ejes: _____



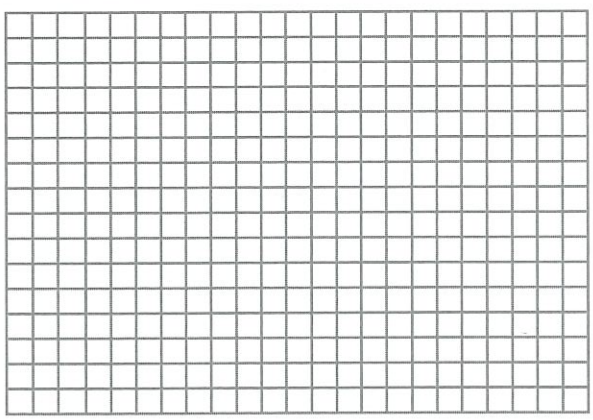
d. $f(x) = \frac{x + 5}{3x + 9}$

Dominio: _____

Imagen: _____

Ecuación de las asíntotas: _____

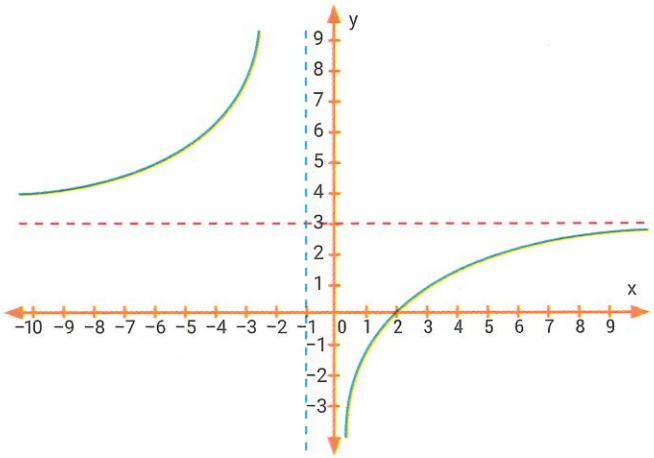
Intersección con los ejes: _____



30. Función homográfica

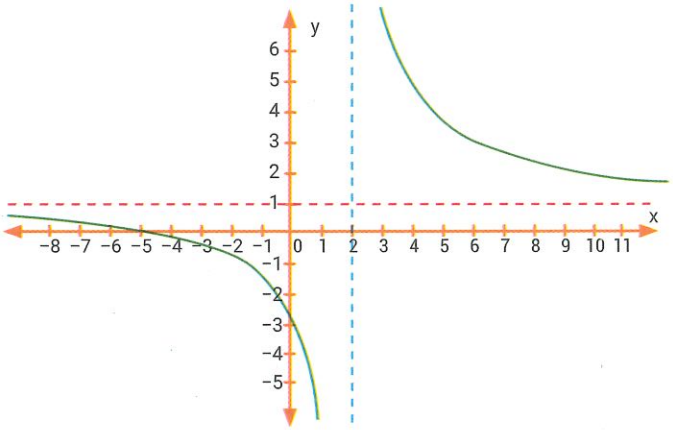
46. Marquen con una X la fórmula que corresponde a la función graficada en cada caso.

a.



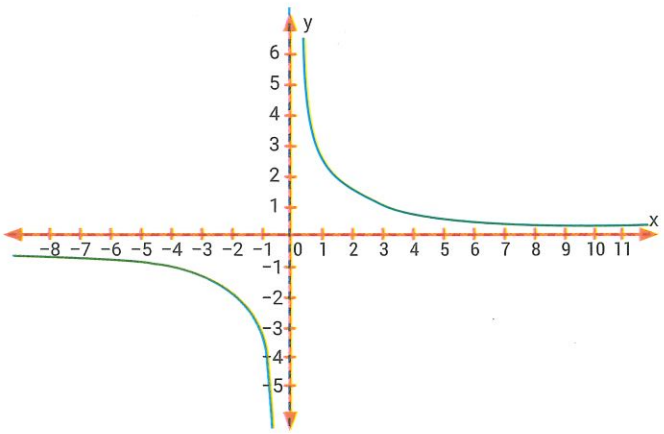
$f(x) = \frac{3x + 6}{x - 1}$ ☐ $f(x) = \frac{3x - 6}{x + 1}$ ☐ $f(x) = \frac{-3x + 6}{x - 1}$ ☐

b.



$f(x) = \frac{x + 5}{x + 2}$ ☐ $f(x) = \frac{x - 5}{-x + 2}$ ☐ $f(x) = \frac{x + 5}{x - 2}$ ☐

c.



$f(x) = \frac{3}{x}$ ☐ $f(x) = -\frac{3}{x}$ ☐ $f(x) = -\frac{x}{3}$ ☐

Integración final

47. Indiquen cuáles de las siguientes funciones son racionales.

a. $f(x) = \frac{2x + 6}{3}$ ☐

b. $f(x) = \frac{x}{x - 11}$ ☐

c. $f(x) = \frac{1}{7x}$ ☐

d. $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{2}}$ ☐

48. Definan el dominio de validez para cada función racional.

a. $f(x) = \frac{x - 4}{3x + 1}$

b. $f(x) = \frac{5}{6 - x}$

c. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 16}$

d. $f(x) = \frac{x + 6}{2x + 4}$

e. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

49. Hallen el dominio, asíntotas e imagen de cada una de las siguientes funciones homográficas.

a. $f(x) = \frac{x - 6}{x - 3}$

b. $f(x) = \frac{4x + 7}{-2x + 8}$

c. $f(x) = \frac{5x + 10}{2 - x}$

d. $f(x) = \frac{0{,}5x - 9}{4x + 8}$

50. Inventen la fórmula de una función homográfica que cumpla lo pedido.

a. Dm = $\mathbb{R} - \{-6\}$; Im = $\mathbb{R} - \{9\}$

b. A.V. en x = 5; A.H. en y = 3

51. Aproximen la gráfica de una función racional que cumpla lo pedido en cada caso.

a. A.V. en x = 2; A.H. en y = 0; f(0) = −3

b. Dm = $\mathbb{R} - \{-4\}$; Im = $\mathbb{R} - \{-1\}$; $C_0 = \{2\}$

52. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Todas las funciones de proporcionalidad inversa tienen dominio igual a $\mathbb{R} - \{0\}$. ☐

b. La raíz de la función $f(x) = \frac{x + 5}{x - 7}$ es x = 7. ☐

c. La función $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ tiene un punto excluido en x = 1. ☐

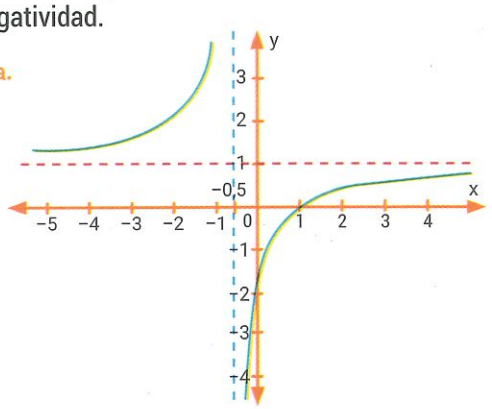
d. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ corta al eje de las abscisas. ☐

e. La función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ es una función homográfica. ☐

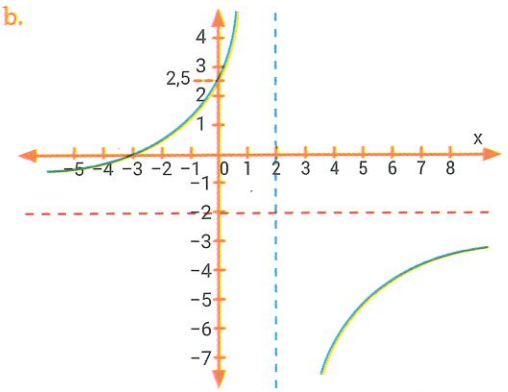
f. La función $f(x) = \frac{6x}{3 - x}$ tiene una A.H. en y = 2. ☐

53. Observen los gráficos e indiquen dominio, imagen, asíntotas, raíces, f(0), intervalos de crecimiento y decrecimiento y de positividad y negatividad.

a.



b.



54. Completen la tabla.

Función	$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$	$g(x) = \frac{2x+6}{x^2-9}$
Dominio		
Expresión simplificada		
A.V.		
A.H.		
A.O.		
Punto excluido		
Raíces		
Ordenada al origen		

55. Hallen lo pedido sabiendo que la fórmula de la función es $h(x) = \frac{x+7}{x^2+8x+7}$.

a. Dominio

b. $h(2) =$

c. A.H.:

d. Punto excluido:

e. $h(0) =$

56. Inventen la fórmula de una función racional que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Tiene dos asíntotas verticales y no tiene asíntota horizontal.

b. Tiene una asíntota vertical en $x = -7$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

c. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = -2$.

d. No tiene asíntota vertical y tiene asíntota horizontal en $y = 8$.

57. Completen. Luego, grafiquen cada función.

a. $f(x) = \frac{-x+1}{x+3}$

- Dominio:
- Imagen:
- Ecuación de las asíntotas:
- Punto excluido:
- Intersección con ejes:

b. $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

- Dominio:
- Imagen:
- Ecuación de las asíntotas:
- Punto excluido:
- Intersección con ejes:

c. $f(x) = \frac{4}{x+1} - 1$

- Dominio:
- Imagen:
- Ecuación de las asíntotas:
- Punto excluido:
- Intersección con ejes.

d. $f(x) = \frac{3x-6}{x^2-4}$

- Dominio:
- Imagen:
- Ecuación de las asíntotas:
- Punto excluido:
- Intersección con ejes:

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Concepto de función

Una función es una relación entre dos variables en la que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, llamado imagen. Para que una relación sea función debe cumplir dos condiciones: **existencia y unicidad**. Esto significa que todos los valores del dominio deben tener imagen y ser única.
En general, las variables se designan con las letras "x" (variable independiente) e "y" (variable dependiente). La **variable "y" está en función de la variable "x" → y = f(x)**

Dominio e imagen de una función

- **Dominio:** conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- **Imagen:** conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente.

Cálculo de los puntos de intersección con los ejes (raíz y ordenada al origen)

- Para hallar los puntos de intersección con el eje de abscisas se hace **y = 0** y se resuelve la ecuación resultante. Dichos puntos reciben el nombre de **raíces o ceros** de la función.
- Para hallar el punto de intersección con el eje de ordenadas se hace **f(0)** (se reemplaza **x** por **0**) y se calcula el valor resultante. Dicho punto recibe el nombre de **ordenada al origen** de la función.

Tablas de valores

En muchas ocasiones para aproximar mejor la gráfica de una función se elabora una tabla de valores tomando algunos valores de la variable "x" y calculando su correspondiente imagen "y". Luego, se ubican en un gráfico cartesiano los pares ordenados (x; y) obtenidos y se grafica la función.

Características de las funciones

- **Función creciente:** es creciente si al aumentar la variable independiente aumenta la variable dependiente.
- **Función decreciente:** es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente.
- **Función constante:** es constante si al variar la variable independiente, la variable dependiente permanece invariable.

5 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

58. ¿Cuál es la expresión simplificada de $\frac{x^3 - 3x^2}{x^3 - 9x}$?

- ○ $\frac{x}{3}$
- ○ $\frac{x^2}{x+3}$
- ○ $\frac{3x}{9}$
- ○ $\frac{x}{x+3}$

59. ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$?

- ○ $\frac{1+x}{x^2-4}$
- ○ $\frac{x+1}{x^2+x-6}$
- ○ $\frac{2x+2}{x^2-4}$
- ○ $\frac{x}{x-2}$

60. ¿Cuál es el resultado de la ecuación $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{10}{x^2-9}$?

- ○ $x = 5$
- ○ $x = 3$
- ○ $x = -3$
- ○ $x = -5$

61. ¿Cuál es el dominio de validez de la fracción algebraica $\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3x}$?

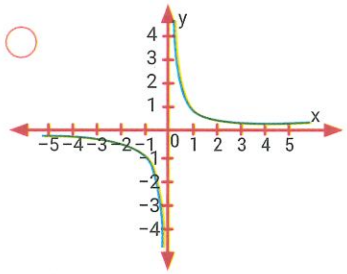
- ○ $\mathbf{R} - \{0; 3\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{0; -3\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{0; 5\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{0; -5\}$

62. ¿Qué tipos de asíntotas tiene la función $g(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$?

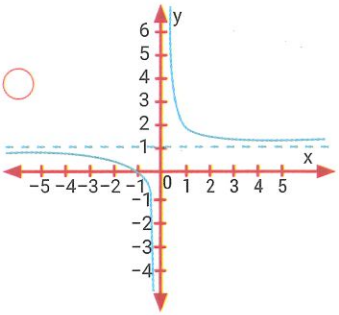
- ○ Tiene A.V. y A.O.
- ○ No tiene asíntotas.
- ○ Solo tiene A.V.
- ○ Tiene A.H.

63. ¿Cuál de estos gráficos corresponde a la función $f(x) = -\frac{1}{x}$?

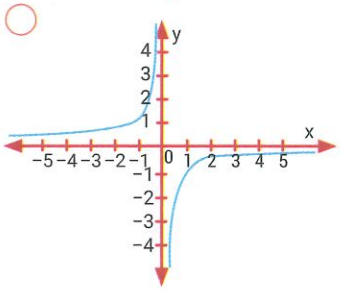
○



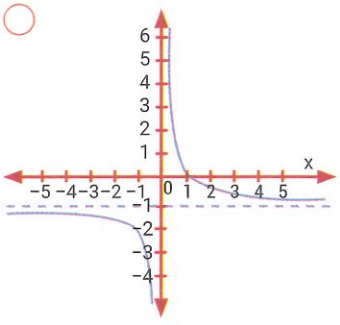
○



○



○



64. ¿Cuál es la imagen de la función $f(x) = \frac{3x - 7}{1 - x}$?

- ○ $\mathbf{R} - \{3\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{1\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{-3\}$
- ○ $\mathbf{R} - \{-1\}$

6 Funciones exponenciales y logarítmicas

31. Logaritmos

▶ SABERES DINÁMICOS

La **logaritmación** es una operación entre dos números reales a y b ($a > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$), llamados argumento y base, respectivamente, que se define como:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$ $\qquad$ $\log_4 \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow 4^{-1} = \frac{1}{4}$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial:

- Si la base es 10, recibe el nombre de **logaritmo decimal** y no se escribe el número 10 en la base.

$$\log a = c \Leftrightarrow 10^c = a \qquad \log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

- Si la base es el número e ($e \cong 2{,}71...$), recibe el nombre de **logaritmo natural o neperiano** y se escribe de la siguiente manera:

$$\ln a = c \Leftrightarrow e^c = a \qquad \ln e = 1 \Leftrightarrow e^1 = e$$

Propiedades de los logaritmos

El logaritmo de 1 es cero	$\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$	$\log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$
El logaritmo de la base es 1	$\log_b b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$	$\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$
El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores	$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ $= 2 + 3$ $= 5$
El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el del denominador	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	$\log_4 \left(\frac{64}{4}\right) = \log_4 64 - \log_4 4$ $= 3 - 1$ $= 2$
El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base	$\log_b (a^n) = n \cdot \log_b a$	$\log_7 (49^2) = 2 \cdot \log_7 49$ $= 2 \cdot 2$ $= 4$

Para poder resolver aquellos logaritmos en los cuales el argumento no es una potencia de la base, se debe aplicar un **cambio de base**, eligiendo para ello logaritmos con bases convenientes.

$$\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$$

En general, resulta conveniente llevarlo a logaritmos decimales o neperianos que pueden calcularse con cualquier calculadora científica.

$\log_9 27 = \frac{\log 27}{\log 9} = \frac{\ln 27}{\ln 9} = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\log_{11} 48 = \frac{\log 48}{\log 11} = \frac{\ln 48}{\ln 11} \cong 1{,}61$

ACTIVIDADES

31. Logaritmos

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que el $\log_{-2} 4 = 2$?

b. ¿Es cierto que no existe el $\log_5 0$?

c. El $\log_6 28$, ¿se puede calcular con $\frac{\log 6}{\log 28}$ o $\frac{\log 28}{\log 6}$?

2. Calculen los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a. $\log_6 36 =$ _____

b. $\log 0{,}001 =$ _____

c. $\ln 1 =$ _____

d. $\log_3 \frac{1}{9} =$ _____

e. $\log 100 =$ _____

f. $\log_{\sqrt{2}} 16 =$ _____

3. Indiquen = 0 ≠ según corresponda.

a. $\log x + \log z \square \log (x + z)$

b. $\log_2 \sqrt[3]{x} \square \frac{1}{3} \log_2 x$

c. $(\ln x)^2 \square 2 \ln x$

d. $\frac{\log_b 21}{\log_b 5} \square \log_b \frac{21}{5}$

4. Desarrollen las siguientes expresiones aplicando las propiedades.

a. $\log (x \,.\, y)^n =$ _____

b. $\log_5 \frac{z^n}{x^n} =$ _____

c. $\ln (\sqrt{x} \,.\, y^4) =$ _____

d. $\log_2 \left(\frac{x^3}{z^5} . \sqrt{z}\right) =$ _____

5. Expresen en un solo logaritmo.

a. $2 \,.\, \ln 4 + \ln x =$ _____

b. $3 \,.\, (\log x - 5 \,.\, \log z) =$ _____

c. $3 \,.\, \log_3 x + \frac{1}{4} \,.\, \log_3 z =$ _____

d. $\log x + 2 \,.\, \log z - \frac{1}{2} \,.\, \log x =$ _____

6. Resuelvan aplicando propiedades.

a. $\log_3 \frac{27 \,.\, 9}{\frac{1}{3}} =$ _____

b. $\log \sqrt{10} - \ln 1 =$ _____

c. $\log \sqrt{\frac{100^3}{0{,}1}} =$ _____

d. $\ln e^2 + \log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^5 =$ _____

e. $\log_2 (32 \,.\, 16) - \log_4 \left(\frac{1}{4} \,.\, 64\right) =$ _____

f. $\ln \sqrt[3]{e^2} - \log_5 \sqrt[4]{25} =$ _____

32. Ecuaciones logarítmicas

▶ SABERES DINÁMICOS

Las ecuaciones en las cuales la incógnita aparece afectada por un logaritmo reciben el nombre de **ecuaciones logarítmicas.** Para resolver ecuaciones logarítmicas, hay que tener en cuenta:

1. $\log_b x \Rightarrow x > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$
2. $\log_b x = c \Rightarrow b^c = x$
3. $\log_b x_1 = \log_b x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
4. Las propiedades de los logaritmos.
5. Verificar las soluciones para que no se obtengan logaritmos con argumentos nulos o negativos.

a. $\log_2(x-1) = 3$

$x - 1 = 2^3$

$x - 1 = 8$

$x = 8 + 1$

$\boldsymbol{x = 9}$

Verificación: $\log_2(\mathbf{9} - 1) = 3$

$\log_2 8 = 3 \Rightarrow \mathbf{3 = 3}$

Solución: $\boldsymbol{x = 9}$

b. $\log_3(x+1) = 1 - \log_3(x-1)$

$\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 1$

$\log_3[(x+1).(x-1)] = 1$

$(x+1).(x-1) = 3^1 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow$

$x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow \boldsymbol{x = \pm 2}$

Verificación:

$\log_3(\mathbf{-2} + 1) = 1 - \log_3(\mathbf{-2} - 1) \Rightarrow$ ***No existe.***

$\log_3(\mathbf{2} + 1) = 1 - \log_3(\mathbf{2} - 1) \Rightarrow \log_3 3 = 1 - \log_3 1$

$\Rightarrow \mathbf{1 = 1}$ *Solución:* $\boldsymbol{x = 2}$

• En ocasiones en la ecuación se necesita hacer un cambio de base.

Resuelvan la ecuación: $\log_4(x+1) = \log_2(x-1)$	
Se hace el cambio de base. (en este caso a base b = 2)	$\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4} = \log_2(x-1)$ con $x > 1$
Se resuelve.	$\frac{\log_2(x+1)}{2} = \log_2(x-1)$ $\log_2(x+1) = 2.\log_2(x-1)$ $\log_2(x+1) = \log_2(x-1)^2$ $(x+1) = (x-1)^2 \Rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0}$ **(no vale);** $\boldsymbol{x_2 = 3}$ *Solución:* $\boldsymbol{x = 3}$

• En ocasiones el logaritmo está afectado a una potencia y hay que hacer cambio de variable.

Resuelvan la ecuación: $\log(x^2) + (\log x)^2 = 3$	
En el primer término la potencia afecta al argumento, en el segundo término la potencia afecta a todo el logaritmo.	$\log(x^2) + (\log x)^2 = 3$ $2.\log x + (\log x)^2 = 3$
Se sustituye "log x" por "U", y se convierte en una ecuación cuadrática que se resuelve con la fórmula resolvente.	$2.U + U^2 = 3$ $2.U + U^2 - 3 = 0$ $U_1 = -3;\ U_2 = 1$
Se vuelve a cambiar la variable "U" por "log x" y se resuelve.	$\log x = -3;\ \log x = 1$ $\boldsymbol{x = 10^{-3};\ x = 10^1}$ *Solución:* $\boldsymbol{x = 0{,}001;\ x = 10}$

ACTIVIDADES

32. Ecuaciones logarítmicas

Test de comprensión

7. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La ecuación $3 + \ln 2 = x + 1$ ¿es una ecuación logarítmica?

b. ¿Es cierto que la ecuación $\log x^2 = 2$ tiene la misma solución que $2 . \log x = 2$?

c. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\log_{2x} 25 = 2$?

8. Resuelvan aplicando la definición de logaritmo. Unan con flechas cada ecuación con su solución.

a. $\log_4 2x = 1$	• $x = 1$
b. $\ln x = 0$	• $x = 10$
c. $\log_{x+1} 25 = 2$	• $x = \frac{1}{6}$
d. $\log(15x - 50) = 2$	• $x = 2$
e. $\log_x 6 = -1$	• $x = 0$
f. $\log_{\sqrt{2}}(x + 4) = 4$	• $x = 4$

9. Discutan con un compañero y marquen con una X las afirmaciones correctas. Expliquen las respuestas.

a. La solución de la ecuación $\log(x - m) - z = 0$ pertenece al intervalo $(m; +\infty)$. ☐

b. La ecuación $\log_{-b} x = 0$ no tiene solución para ningún valor de b. ☐

10. Rodeen la opción que es solución de la ecuación.

a. $\log_{2x} 6 = 1$	• $x = -3$	• $x = 3$	• $x = 0$
b. $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$	• $x = -5$	• $x = -\frac{1}{5}$	• $x = 5$
c. $\log_4(x + 3) = 0$	• $x = 2$	• $x = -2$	• $x = 1$
d. $\ln x = 0$	• $x = 1$	• $x = e$	• $x = 0$
e. $\log_7 x^3 = 3$	• $x = 27$	• $x = 7$	• $x = -7$
f. $\log \frac{1}{x} = -1$	• $x = 1$	• $x = -10$	• $x = 10$

11. Respondan y expliquen sus respuestas.

¿Es correcta la siguiente resolución?

$$\log_5 x + \log_5(2x - 1) = \log_5(2x + 2)$$

$$\log_5 \frac{x.(2x - 1)}{2x + 2} = 0$$

$$x.(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \wedge x = \frac{1}{2}$$

32. Ecuaciones logarítmicas

12. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. $x = 4$ es solución de la ecuación $\ln(x + 1) - \ln(2x - 3) = 0$. ☐

b. La ecuación $2 . \log_3(-x) - 4 = 0$ no tiene solución. ☐

c. La ecuación $\log(1 - x) - \log(x + 6) = 0$ tiene solución entera. ☐

d. $\log_x 4 + \log_x 2 = 1$ "$x = 8$ es solución de la ecuación". ☐

13. Resuelvan las siguientes ecuaciones y luego verifiquen.

Ecuación	Verificación
$\log x + \log(x + 9) = 1$	
$2 . \log_2 x + \log_2 x^3 = 10$	
$7 . \log(x + 6) = \log 1$	
$\log(7x + 1) = 2 . \log(x + 3) - \log 2$	
$\log_2(x + 1) - \log_3 27 + \log_2(x - 1) = 0$	

32. Ecuaciones logarítmicas

14. Resuelvan las ecuaciones aplicando previamente cambio de base.

a. $\log_3(x+1) - \log_9(10x+1) = \log_3 1$

b. $\log_5 x - \log_{125} x^2 - \log_5 2 = \log_{125} 1$

c. $\log_7(x+3) - \log_{49}(-9-5x) = \log_7 49 - \log_8 64$

d. $\log_3 x^2 + \log_{81} x = 3 \cdot \log_9 x + \frac{3}{2}$

15. Resuelvan las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a. $\log_2\left(1-\frac{1}{2}x\right) + \log_2\left(1+\frac{1}{2}x\right) = \log_6 \sqrt[3]{36} - \frac{8}{3}$

b. $\log_8 \frac{8}{(1-x)^2} = 1 + \log_8 \frac{4}{1-x}$

c. $\log_9 x - \log_9(x-1) = \log_9(x-2) + 4^{-0,5}$

d. $\log_{\sqrt{6}}(x+5) = 2 - \log_{\sqrt{6}} x$

16. Resuelvan las siguientes ecuaciones con cambio de variable.

a. $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$

b. $\ln^2 x - 2 \cdot \ln x^2 + \ln \frac{1}{x} = 0$

33. Ecuaciones exponenciales

▶ SABERES DINÁMICOS

Toda ecuación en la que la incógnita se encuentra en el exponente recibe el nombre de **ecuación exponencial.**
Para resolver una ecuación exponencial, hay que tener en cuenta:

1. $a^x \Rightarrow a > 0 > a \neq 1$
2. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
3. Las propiedades de las potencias.
4. Caso de factor común.
5. Verificar que las soluciones sean válidas.

Para recordar pág. 129

a. $2^{3x-8} - 2^x = 0$

$2^{3x-8} = 2^x$

$3x - 8 = x$

$2x = 8$

Solución: $x = 4$

b. $5^{x+1} + 5^x = 6$

$5^x . 5^1 + 5^x = 6$

$5^x (5 + 1) = 6$

$5^x . 6 = 6$

$5^x = 1$

Solución: $x = 0$

c. $\frac{3^{x+1} . 9^x}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} \Rightarrow \frac{3^{x+1} . 3^{2x}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-6x} \Rightarrow$

$3^{(x+1+2x)-1/2} = 3^{-6x} \Rightarrow (x + 1 + 2x) - \frac{1}{2} = -6x \Rightarrow$

$3x + 6x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 9x = -\frac{1}{2}$

Solución: $x = -\frac{1}{18}$

• En ocasiones las ecuaciones exponenciales tienen bases distintas y para poder lograr el despeje de la variable se aplican logaritmos a ambos miembros de la ecuación:

$$m^x = n \Rightarrow \log_b m^x = \log_b n \Rightarrow x . \log_b m = \log_b n \Rightarrow x = \frac{\log_b n}{\log_b m}$$

Resuelvan la ecuación: $5^{1-x} = 3$	
Se aplica logaritmos a ambos miembros y se despeja la variable.	$5^{1-x} = 3$ $\log 5^{1-x} = \log 3$ $(1 - x) \log 5 = \log 3$ $1 - x = \frac{\log 3}{\log 5}$ $-x = 0{,}68 - 1$ Solución: $x = 0{,}32$

• En ocasiones el término exponencial está elevado a una potencia y se necesita hacer un cambio de variable. Se debe recordar que $(m)^{2x} = (m^2)^x = (m^x)^2$.

Resuelvan la ecuación: $16^x + 4^x = 12$	
El primer término se factoriza y queda expresado como el cuadrado del término exponencial.	$(4^2)^x + 4^x = 12$ $(4^x)^2 + 4^x = 12$
Se sustituye "4x" por "U", y se convierte en una ecuación cuadrática que se resuelve con la fórmula resolvente.	$U^2 + U = 12$ $U^2 + U - 12 = 0$ $U_1 = -4 \wedge U_2 = 3$
Se vuelve a cambiar la variable "U" por "4x" y se resuelve aplicando logaritmo a ambos miembros.	$4^x = -4 \wedge 4^x = 3$ $4^x = -4 \Rightarrow \log 4^x = \log -4 \rightarrow$ **No tiene solución** $4^x = 3 \Rightarrow \log 4^x = \log 3 \Rightarrow$ $x \log 4 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 4}$ Solución: $x = 0{,}79$

ACTIVIDADES

33. Ecuaciones exponenciales

Test de comprensión

17. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que la ecuación $4^2 + x^2 = 1$ es exponencial?

b. En la ecuación $9^x + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$, ¿cuál es la sustitución de variable que se debe hacer?

c. ¿Es cierto que todas las ecuaciones exponenciales tienen solución?

18. Completen para que se cumpla la igualdad.

a. $\square^3 = 8$

b. $6^{\square} = \frac{1}{6}$

c. $\square^{-3} = 0{,}001$

d. $\square^{-3} = \frac{1}{125}$

e. $3^{\square} = 27^{-1}$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = 16$

19. Escriban como una sola potencia.

a. $m^2 \cdot m^{x+1} =$ _____

b. $\frac{(m^{3x})^2}{m^x} =$ _____

c. $m^{2x} \cdot \sqrt{m} =$ _____

d. $(m^x : m^{1-x})^4 =$ _____

e. $m^{5x} : \sqrt{m^4} =$ _____

f. $(m^x \cdot m^5)^3 \cdot m^{2x} =$ _____

20. Unan con flecha cada ecuación con su solución.

a. $3^{x-1} = \frac{1}{3}$	• $x = 2$
b. $4 - 4^x = 0$	• $x = -\frac{1}{4}$
c. $25^{2x+2} = 125$	• $x = 3$
d. $(2^{x+1})^2 = 64$	• $x = -1$
e. $-3^x + 27 = 0$	• $x = 0$
f. $7^{x-2} = \frac{1}{243}$	• $x = 1$

21. Escriban un párrafo explicando cómo se resuelven las siguientes ecuaciones. Luego, comparen con un compañero.

a. $2^x = 8$ _____

b. $3^x = 9$ _____

33. Ecuaciones exponenciales

22. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $7^{x-1} = 49^{x-1}$

b. $2 \cdot 9^x = 162$

c. $\frac{3^x}{27} = \frac{1}{81}$

d. $\sqrt[x-1]{16} = 2^{x-1}$

e. $3^x \cdot \left(\frac{27}{3}\right)^x = 81$

f. $16^{x+3} = 4^{x-2}$

23. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La solución de la ecuación $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 28 = 0$ es $x = 2$. ☐

b. La ecuación $3 \cdot 4^x + 6 \cdot 2^x - 24 = 0$ tiene dos soluciones. ☐

c. La solución de la ecuación $6^{x-3} = 2^x$ es un número entero. ☐

d. La ecuación $9^x + 3 \cdot 3^x + 2 = 0$ no tiene solución. ☐

24. Resuelvan cada una de las siguientes ecuaciones de dos maneras diferentes.

a. $4^{x-2} = 64$

b. $3^{2x} - 3^x = 0$

33. Ecuaciones exponenciales

25. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{5^x + 1}{5^x} = 26$

b. $4^{x+1} - 2^{x+1} = 2$

c. $2^{2x+1} - 6 . 4^x + 8 = 0$

d. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} + 2 . 5^x = 75$

26. Encuentren y encierren con un círculo los errores cometidos al resolver la siguiente ecuación. Tengan en cuenta que en todos los pasos hay un error.

$3^{-x} + 9^x + 3^x = 1$

$3^{-x} + 3^2 . 3^x + 3^x = 1$

$-3^x + 3^2 . 3^x + 3^x = 1$

$3^x . (1 + 3^2 + 1) = 1$

$3^x = 11$

$x = \frac{\log 3}{\log 11}$

27. Resuelvan en la carpeta las siguientes ecuaciones y luego completen el cuadro.

Ecuación	Soluciones
$5^{x+1} + 2.5^x - 5^{x-1} = 34.5^{-1}$	
$2^{x^2} . 4^x - \frac{1}{2} = 0$	
$(3^{2x} - 81) . (3^{2x} + 9) = 0$	
$5^{2x-2} - 5^3 = 4.5^x$	
$2^{x+1} + 8.2^{-x} = 10$	
$\frac{1}{3} . 9^x - 6 = 3^x$	
$-7^x + 7^{x+1} = 6$	
$2^x - 3^{x-1} + 6 = \sqrt{36}$	

DinámicaMente

Resuelvan el siguiente sistema formado por ecuaciones exponenciales.

$$\begin{cases} 2^{x-y} = 4 \\ 5^{2x+y} = 5 \end{cases}$$

28. Completen el espacio aplicando la definición de logaritmos.

a. $\log_m 4 = 1 \Leftrightarrow$ ☐

b. ☐ $\Leftrightarrow e^x = 5$

c. ☐ $\Leftrightarrow \log z = 2$

d. $\log_4 x = c \Leftrightarrow$ ☐

e. $e^x = z \Leftrightarrow$ ☐

f. $10^z = t \Leftrightarrow$ ☐

29. Reduzcan a una sola expresión aplicando propiedades.

a. $2 . \ln x + \ln(x + 1) =$

b. $4^x . \sqrt{2} . 8^{x-1} =$

c. $\log_3 2x - \frac{1}{3} . \log_3 (1 - x) =$

d. $\frac{7^{2-x} . 49^x}{7^{3x}} =$

30. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. $\ln(x - y) = \frac{\ln x}{\ln y}$ ☐

b. $3^{2x} = 3^2 + 3^x$ ☐

c. $\log 5 = \log_{10} 5$ ☐

d. $\log_3 m = \frac{\ln 3}{\ln m}$ ☐

e. $2^{x-7} = 2^x . 2^{-7}$ ☐

f. $5 . 2^x = 10^x$ ☐

31. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $\log_4 (x + 1) = -1$

b. $5^x = 125$

c. $\log 5x = 2$

d. $6^x - 1 = 0$

e. $\log_{x+1} 64 = 2$

f. $2^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$

g. $\log(2 - x) = \log x$

h. $11^{x+1} - 11^{11-x} = 0$

32. Planteen una ecuación y respondan.

a. El doble del logaritmo de base 3 del consecutivo de un número es igual a 4. ¿Cuál es ese número?

b. El número 2 elevado al triple de un número es igual al inverso de 8. ¿Cuál es ese número?

c. El logaritmo natural del anterior de un número es igual a 0. ¿Cuál es ese número?

d. El número 3 elevado al opuesto de un número es igual a 9. ¿Cuál es ese número?

33. Resuelvan las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a. $\log_7 (2x - 4) - \log_7 (x + 1) = 0$

b. $\log x^3 + 2 . \log x = 10$

c. $\ln(1 - x) = \ln(x - 1) + 1$

d. $\log_2 \sqrt{x} = 3 - \frac{1}{2} . \log_2 x$

e. $\log(x + 2) + \ln e = \log(3x)$

f. $4 . \log x = 2 . \log x + \log 16$

g. $2 . \ln x = \ln(5x - 6)$

h. $\frac{\log_3 (16 - x^2)}{\log_3 (3x - 4)} = 2$

34. Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $5^{x+3} . \frac{1}{25} = 5^{2x}$

b. $2^{x+1} + 5 . 2^x = 28$

c. $\frac{6^x + 1}{6^x} = 217$

d. $5^{x+1} + 5^x - 6 = 0$

e. $3^x - \frac{1}{4} . 4^x = \frac{1}{9} - 4^{x-1}$

f. $\frac{\sqrt[3]{36}}{36^{x+1}} = \frac{6^{-x}}{6}$

35. Resuelvan cada ecuación de dos maneras diferentes.

a. $8^{x+1} = \frac{1}{4}$

b. $\log_2 3x - \log_2 (x + 4) = 0$

36. Resuelvan las siguientes ecuaciones logarítmicas con cambio de variable.

a. $2 - 3 . \log x = -(\log x)^2$

b. $[\log_2 (x + 2) - 1] . \log_2 (x + 2) = 0$

c. $\log^2 x - 3 . \log x = 4$

d. $\log^2 x = (\log x)^2$

e. $6 + (\ln x)^2 = 7 . \ln x$

f. $\log_3 (9x) . \log_3 (9x) - 9 = 0$

37. Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales con cambio de variable.

a. $3 . 4^x = 60 - 3 . 2^x$

b. $\frac{7}{7^{2x+1}} + 49 = \frac{50}{7} . 7^{1-x}$

c. $3^{2x-1} - 3^x - 18 = 0$

d. $4 . 2^{4x} - 12 . 2^{2x} + 8 = 0$

e. $25^x - 5^{x+2} . 5^{-(x+2)} = 24$

f. $2 . (7^{2x} + 6 . 7^x) = 14$

38. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Todas las ecuaciones exponenciales tienen solución. ☐

b. Algunas ecuaciones logarítmicas tienen dos soluciones. ☐

c. La ecuación $-8^x - 8 = 0$ no tiene solución. ☐

d. La ecuación $8^x - 8 = 28x$ no tiene solución. ☐

e. La ecuación $\log (-x) = 1$ tiene por solución un número positivo. ☐

f. El valor obtenido en una ecuación logarítmica es siempre solución. ☐

39. Resuelvan las ecuaciones aplicando previamente cambio de base.

a. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x^3 = \log_3 27$

b. $8 . \log_3 x + \log_9 x - 17 = 0$

c. $\log_4 (2x - 1) - \log_2 x = 0$

d. $\log_2 (4x) - \log_{16} (32x) = 3$

40. Indiquen si las siguientes afirmaciones son correctas.

a. La ecuación $\ln x + 1 = 0$ tiene la misma solución que la ecuación $\ln (x + 1) = 0$.

b. La ecuación $4^{x+1} = 4$ tiene la misma solución que la ecuación $-4^{x+1} = -4$.

41. Respondan sin resolver las ecuaciones: ¿qué valores de "x" no podrían ser solución de las siguientes ecuaciones?

a. $\ln (x - 5) + \log (m + x^2) = 1$

b. $\frac{1}{3^x} - m = 0$

c. $\log x^2 + m = 0$

d. $\log_5 x^3 + \log_3 9 = 2$

42. Marquen con una X la solución de cada una de las ecuaciones.

a. $2 . \log_5 (x - 2) = \log_5 (x + 4)$

- $x = 0$ ☐
- $x = 0 \wedge x = 5$ ☐
- $x = 5$ ☐

b. $4^x + 5 . 2^x = 6$

- $x = 1 \wedge x = -6$ ☐
- $x = 0$ ☐
- $x = 1$ ☐

c. $2^x = \ln e^2$

- $x = 2$ ☐
- $x = 0$ ☐
- $x = 1$ ☐

34. Función logarítmica

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **funciones logarítmicas** son aquellas funciones cuya variable independiente "x" forma parte del argumento de un logaritmo con base b ($b > 0 \wedge b \neq 1$).

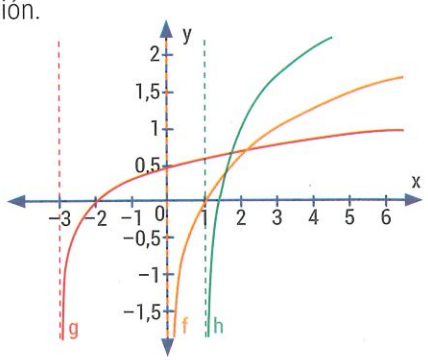
$$f(x) = \log_b x$$

El argumento de un logaritmo solo admite números positivos, por lo tanto, el **dominio** de una función logarítmica serán todos los números que satisfagan esta condición.

$f(x) = \log_3 x \rightarrow x > 0 \rightarrow Dm = (0; +\infty)$

$g(x) = \log(x + 3) \rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \rightarrow Dm = (-3; +\infty)$

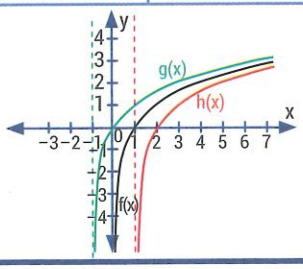
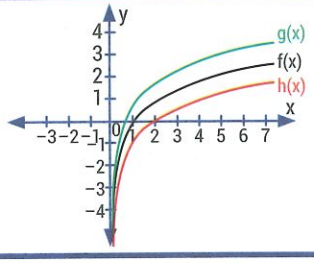
$h(x) = 1 + \ln(x - 1) \rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \rightarrow Dm = (1; +\infty)$



Características de una función logarítmica

- La función logarítmica tiene una asíntota vertical.
- Toda función logarítmica es una función continua.
- La imagen de una función logarítmica es $I_f = \mathbb{R}$.
- El crecimiento o decrecimiento de una función logarítmica depende de la base. Si la base es mayor que 1 ($b > 1$), la función es creciente; en cambio, si está entre 0 y 1 ($0 < b < 1$), la función es decreciente.
- La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Si $f(x) = y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$.

Corrimientos de la función logarítmica según su fórmula a partir de $f(x) = \log_b x$

$f(x) = \log_b(x - a)$		$f(x) = \log_b x + c$	
"a" indica el corrimiento sobre el "eje x" e indica la posición de la asíntota vertical.		"c" indica el corrimiento sobre el "eje y".	
$g(x) = \log_2(x + 1)$	$h(x) = \log_2(x - 1)$	$g(x) = \log_2 x + 1$	$h(x) = \log_2 x - 1$
$a = -1$	$a = 1$	$c = 1$	$c = -1$
$D_f = (-1; +\infty)$ A.V. en $x = -1$	$D_f = (1; +\infty)$ A.V. en $x = 1$	$D_f = (0; +\infty)$ A.V. en $x = 0$	$D_f = (0; +\infty)$ A.V. en $x = 0$
La gráfica se corre 1 unidad a la izquierda.	La gráfica se corre 1 unidad a la derecha.	La gráfica se corre 1 unidad hacia arriba.	La gráfica se corre 1 unidad hacia abajo.
			

Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]

La escala sismológica de Richter es una escala logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar la energía liberada en un terremoto. Existen instrumentos llamados **sismógrafos** que detectan el movimiento de la Tierra.

Considerando **A** la amplitud de onda del terremoto (medida en micrómetros) y A_0 la amplitud de la onda más pequeña detectable (u onda estándar), la fórmula que permite obtener la intensidad **R** del terremoto es:

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

34. Función logarítmica

Test de comprensión

43. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que todas las funciones logarítmicas cortan al eje y?

b. ¿Es cierto que la gráfica de $f(x) = \log x$ es igual a la gráfica de $g(x) = \log(-x)$?

c. ¿Cuál podría ser la fórmula de una función logarítmica cuya gráfica se desplazó 5 unidades a la izquierda respecto a $f(x) = \log x$?

44. **Completen las oraciones sabiendo que la función $f(x) = \log_2(x + 4)$.**

a. El argumento de la función es... _____

b. El dominio de la función es... _____

c. La ecuación de la asíntota vertical es... _____

d. La ordenada al origen de la función es... _____

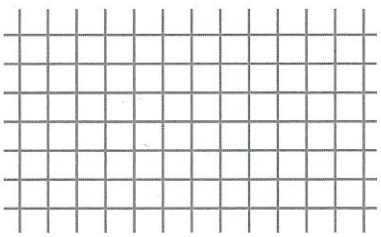
e. La raíz de la función es... _____

45. **Completen la tabla.**

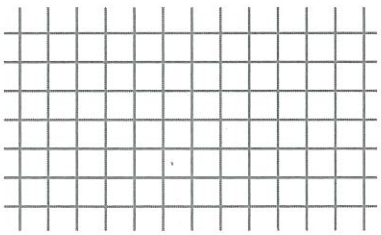
Función	Dominio	Asíntota vertical	Raíz	Ordenada al origen
$f(x) = \log(x + 2)$				
$f(x) = \log_4(x - 4)$				
$f(x) = -2 . \log x$				
$f(x) = \log_3(1 - x)$				
$f(x) = 1 + \ln x$				
$f(x) = \log(2x) - 1$				

46. **Hallen los elementos necesarios y grafiquen las siguientes funciones.**

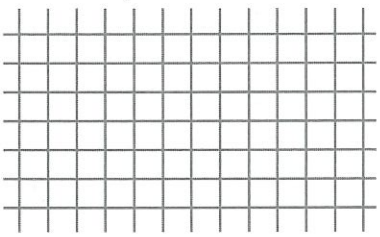
a. $f(x) = \log_2(x - 3)$



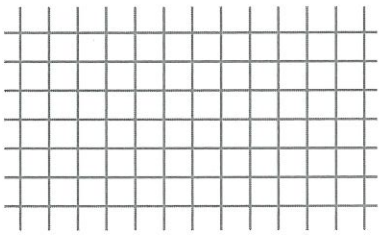
b. $f(x) = \ln(1 - x)$



c. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$



d. $f(x) = 1 + \log x$



34. Función logarítmica

47. Tomen como referencia la gráfica de "f(x) = log x" y tachen lo que no corresponda para que la afirmación sea correcta.

a. La gráfica de $f(x) = \log(x + 9)$ se corre 9/(−9) lugar(es) a la derecha/izquierda.

b. La gráfica de $f(x) = 1 + \log x$ se corre 1/0 lugar(es) hacia arriba/abajo.

c. La gráfica de $f(x) = \log x - 3$ se corre 3/0 lugar(es) hacia arriba/abajo.

d. La gráfica de $f(x) = \log(x - 2)$ se corre 2/(−2) lugar(es) a la derecha/izquierda.

e. La gráfica de $f(x) = -5 + \log(x)$ se corre 5/(−5) lugares hacia arriba/abajo.

48. Grafiquen en la carpeta y completen la tabla.

Función	Dominio	A. V.	Raíz	f(0)	Imagen	C^+	C^-
$f(x) = -2.\ln x$							
$f(x) = \log_3(-x)$							
$f(x) = 1 + \log(x + 2)$							
$f(x) = 3.\log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$							
$f(x) = \log_4(4 - x)$							
$f(x) = \ln(x + 5)$							

49. Tengan en cuenta las siguientes funciones y marquen con una X las afirmaciones correctas.

$f(x) = \log_2(6 + x)$ $\quad g(x) = \log_2(x)$ $\quad h(x) = 6.\log_2 x$ $\quad j(x) = 6.\log_2(x + 6)$

a. h(x) y g(x) tienen el mismo dominio. ☐

b. f(x) y g(x) tienen la misma raíz. ☐

c. f(x) y j(x) tienen la misma asíntota vertical. ☐

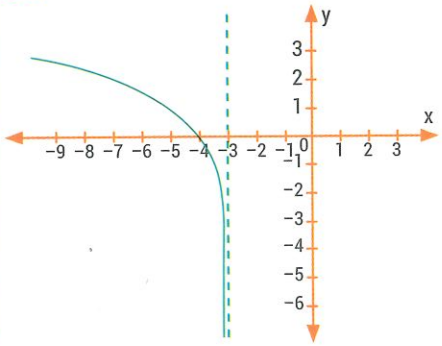
d. f(x) y h(x) tiene la misma raíz. ☐

e. j(x) y f(x) tienen la misma raíz. ☐

f. h(x) y j(x) tienen la misma imagen. ☐

g. f(x) y j(x) tienen la misma ordenada al origen. ☐

50. Observen el gráfico y completen.



D_f = _____ $\quad C^+$ = _____

A. V. = _____ $\quad C^-$ = _____

I_f = _____ $\quad C^{\nearrow}$ = _____

f(0) = _____ $\quad C^{\searrow}$ = _____

C_0 = _____

34. Función logarítmica

51. Lean atentamente y respondan.

La fórmula para medir la intensidad de un sismo está dada (según la escala de Richter) por la función $R = \log \frac{A}{A_0}$, donde A es la amplitud de onda del terremoto (medida en micrómetros) y A_0, la amplitud de la onda más pequeña detectable (u onda estándar).

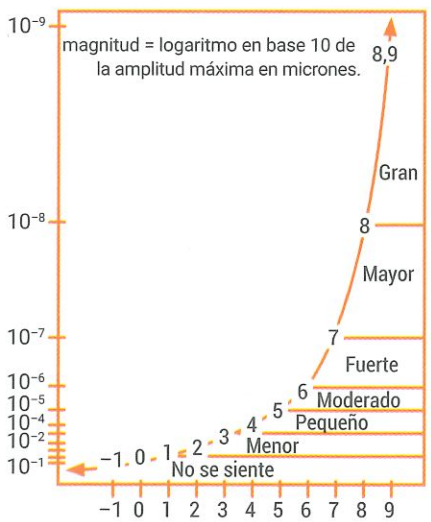
a. Calculen el valor R de un sismo cuya amplitud fue 10 000 veces más grande que la onda más pequeña detectable.

b. Calculen cuántas veces más grande que A_0 fue la onda de un sismo de intensidad 2,6 en la escala de Richter.

c. ¿Es cierto que R = 1 corresponde a un sismo cuya amplitud fue 10 veces más grande que la onda más pequeña detectable? Analicen con un ejemplo.

d. Si la energía liberada en un sismo (expresada en ergios) está dada por $E = 10^{11,8 + 1,5R}$, ¿cuál es la energía liberada por un terremoto escala R = 7? ¿Podría E ser igual a 0? Expliquen las respuestas.

e. La siguiente gráfica describe la amplitud de la onda del terremoto en función de la magnitud del terremoto.



Cualquier terremoto que se registra por debajo de 5 es un terremoto menor; puede mover un poco el suelo, pero normalmente no es lo suficientemente fuerte para causar algún daño. Los terremotos que miden entre 5 y 7,9 en la escala de Richter son mucho más intensos y cualquier terremoto por encima de 8 será severo y causará mucho daño.

Busquen los datos referidos a los siguientes terremotos y completen la siguiente tabla.

Lugar del terremoto	Año	Escala de Richter	Características
Argentina (San Juan)	1977		
Chile (Valdivia)	1960		
Perú (Arequipa)	2001		
Haití	2010		
Japón	2011		

35. Función exponencial

▶ SABERES DINÁMICOS

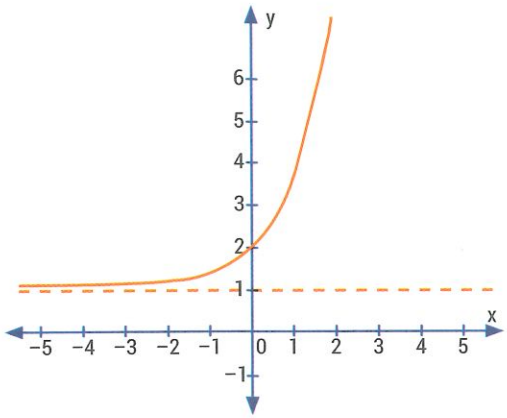
Se denomina **función exponencial** a toda función de la forma: $f(x) = k \cdot a^x + c$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$

$f(x) = 2^x$ $\quad g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1$ $\quad h(x) = 5^{x-2} + 3$

La variable "x" admite cualquier valor real, por lo que el **dominio** de todas las funciones exponenciales es $D_f = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

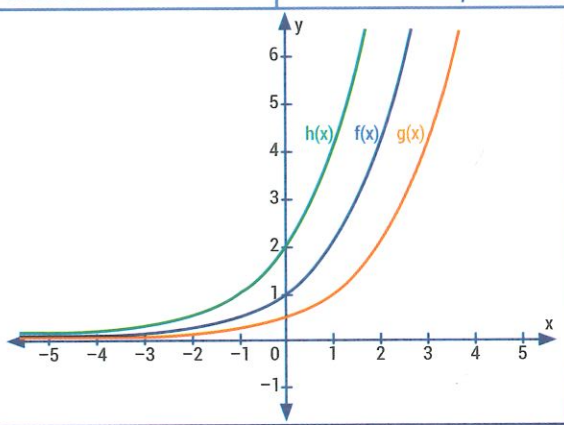
Características de una función exponencial

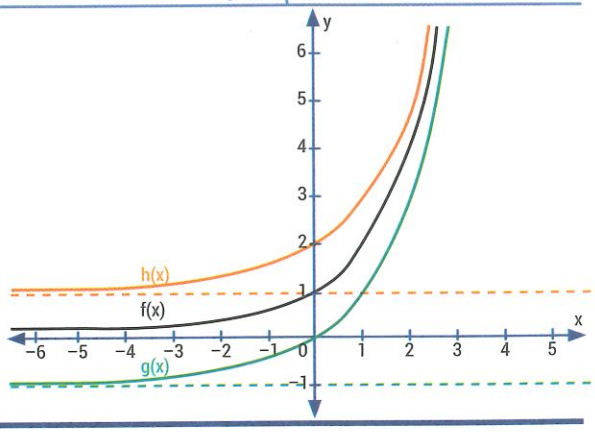
- Toda función exponencial es una función continua.
- La función exponencial tiene una asíntota horizontal.
- La ecuación de la A.H. es y = c.
- La imagen de una función exponencial depende de la A.H.
- El crecimiento o decrecimiento de una función exponencial depende del valor de la base (a) y del coeficiente (k).
- La función exponencial es la inversa de la función logarítmica.



Corrimientos de la función exponencial según su fórmula a partir de $f(x) = a^x$

$f(x) = a^{x-b}$		$f(x) = a^x + c$	
"b" indica el corrimiento sobre el eje x.		"c" indica el corrimiento sobre el eje y.	
$g(x) = 2^{x-1}$	$h(x) = 2^{x+1}$	$g(x) = 2^x - 1$	$h(x) = 2^x + 1$
$b = 1$	$b = -1$	$c = -1$	$c = 1$
$I_f = (0; +\infty)$ A.H. en $y = 0$	$I_f = (0; +\infty)$ A.H. en $y = 0$	$I_f = (-1; +\infty)$ A.H. en $y = -1$	$I_f = (1; +\infty)$ A.H. en $y = 1$
La gráfica se corre 1 unidad a la derecha.	La gráfica se corre 1 unidad a la izquierda.	La gráfica se corre 1 unidad hacia abajo.	La gráfica se corre 1 unidad hacia arriba.





Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fcExp * para mirar un video donde se explica un ejemplo de análisis completo de una función exponencial.

* Enlace acortado de https://youtu.be/egHWd_l-gbg

ACTIVIDADES

35. Función exponencial

Test de comprensión

52. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que la función $f(x) = 3.1^x$ es una función exponencial?

b. La función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$, ¿es creciente o decreciente?

c. ¿Es cierto que la función $f(x) = 2.5^x$ tiene la misma ordenada al origen que la función $g(x) = 10^x$?

53. Marquen con una X las fórmulas que corresponden a funciones exponenciales.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2$ ☐

b. $f(x) = 5 + x^3$ ☐

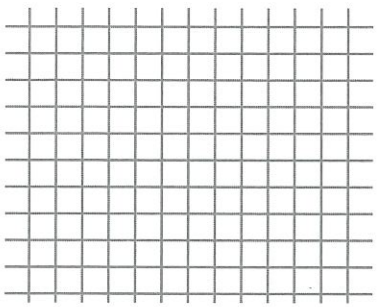
c. $f(x) = (-3)^{x+1}$ ☐

d. $f(x) = -2.7^x$ ☐

54. Completen la tabla de valores y grafiquen ambas funciones en el mismo sistema de ejes cartesianos.

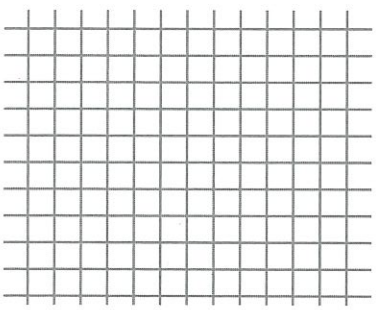
a. $f(x) = 3^x \wedge g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		



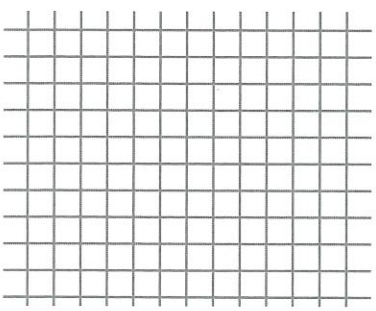
b. $f(x) = 5^x \wedge g(x) = -5^x$

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		



c. $f(x) = 2^x \wedge g(x) = -(0,5)^x$

x	f(x)	g(x)
−2		
−1		
0		
1		
2		

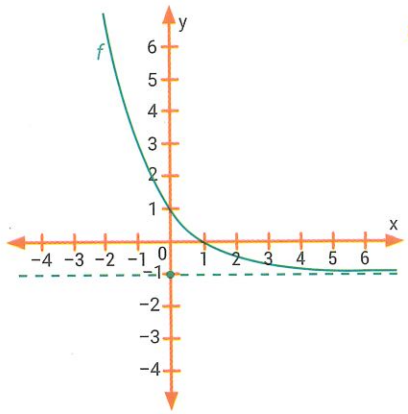


35. Función exponencial

55. Completen la tabla.

Función	Dominio	Asíntota horizontal	Imagen	Raíz	Ordenada al origen
$f(x) = 5.6^x - 1$					
$f(x) = -\frac{1}{2}.4^x + 2$					
$f(x) = 3.2^x - 3$					
$f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$					

56. Observen los gráficos y completen.



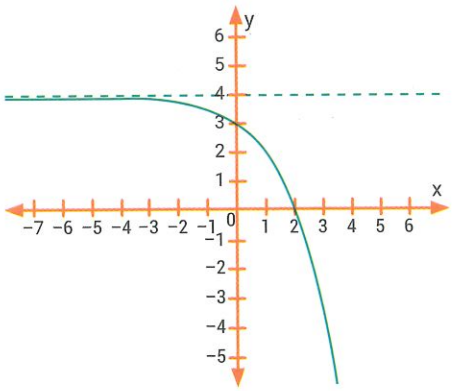
a. D_f = _____ C^+ = _____

A. H. = _____ C^- = _____

I_f = _____ $C^{\nearrow}$ = _____

f(0) = _____ $C^{\searrow}$ = _____

C_0 = _____



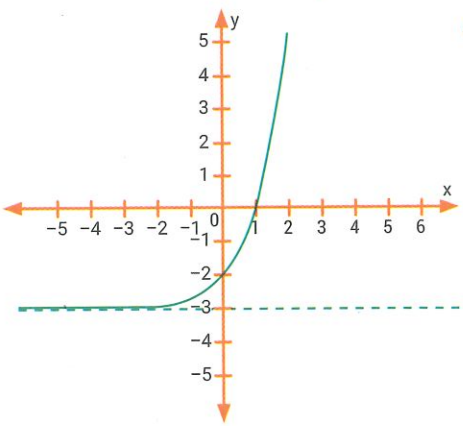
b. D_f = _____ C^+ = _____

A. H. = _____ C^- = _____

I_f = _____ $C^{\nearrow}$ = _____

f(0) = _____ $C^{\searrow}$ = _____

C_0 = _____



c. D_f = _____ C^+ = _____

A. H. = _____ C^- = _____

I_f = _____ $C^{\nearrow}$ = _____

f(0) = _____ $C^{\searrow}$ = _____

C_0 = _____

35. Función exponencial

57. Unan con flecha, tomando como referencia $f(x) = 7^x$, la fórmula de la función que cumple lo pedido en cada caso.

a. Su gráfica se corre 8 lugares hacia arriba. • $f(x) = 7^x - 8$

b. Su gráfica se corre 8 lugares hacia la izquierda. • $f(x) = 7^{x-8}$

c. Su gráfica se corre 8 lugares hacia la derecha. • $f(x) = 7^x + 8$

d. Su gráfica se corre 8 lugares hacia abajo. • $f(x) = 7^{x+8}$

58. Completen las tablas según corresponda y luego grafiquen cada función en sus carpetas.

a. $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{x+1} + \frac{1}{2}$

D_f	A. H.	f(0)	C_0	I_f

b. $f(x) = 2.3^x - 6$

D_f	A. H.	f(0)	C_0	I_f

59. Lean atentamente y resuelvan.

Juan deposita $3 000 en un banco que ofrece un interés compuesto del 5% mensual.

a. Completen la siguiente tabla, considerando que no se efectúa ninguna extracción de dinero.

Período (en meses)	Capital inicial del período (en $)	Interés ganado (en $)	Capital final del período (en $)
1	3 000	150	3 150
2	3 150		
3			
4			
5			
6			

b. ¿Cuáles son las variables? ¿Cuáles son el dominio y la imagen en el contexto del problema?

c. Con los datos obtenidos en la tabla anterior, realicen en la carpeta un gráfico aproximado en el contexto del problema e indiquen si la función crece o decrece.

d. Encuentren una fórmula que les permita calcular el "Capital final C(x)" para un período "x", teniendo en cuenta que no se realizan extracciones.

e. Usando la fórmula, calculen cuánto tiempo deberá transcurrir hasta que el depósito inicial se duplique.

Integración final

60. Marquen con una X las funciones que son exponenciales o logarítmicas.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x-1} + 2$ ☐

b. $f(x) = x + \log 100$ ☐

c. $f(x) = \ln(2x - 6)$ ☐

d. $f(x) = \ln e + x^3$ ☐

e. $f(x) = 2^{-x} + 5$ ☐

f. $f(x) = -\log_3 2x$ ☐

61. Completen la tabla.

Función	D_f	Asíntota	I_f
$f(x) = -5^{x-2}$			
$f(x) = -\log_3(x + 2)$			
$f(x) = 1 + \ln x$			
$f(x) = 7^x - 5$			
$f(x) = -3.\left(\frac{2}{5}\right)^x + 6$			
$f(x) = -3.\log(x - 6)$			

62. Completen lo pedido para cada función.

a. $f(x) = \log_4(x + 3)$

Raíz: Ordenada al origen:

$f(1) =$ $f(-4) =$

b. $f(x) = 1 - \ln(1 - x)$

Raíz: Ordenada al origen:

$f(2) =$ $f(-5) =$

c. $f(x) = -6.2^{x+1} + 12$

Raíz: Ordenada al origen:

$f(1) =$ $f(-1) =$

63. Para cada función logarítmica busquen el dominio, la asíntota y la intersección con los ejes. Luego, grafiquen en sus carpetas.

a. $f(x) = 2.\log_{\frac{1}{5}}(x - 1)$

b. $f(x) = 2 - \ln(4x)$

c. $f(x) = -\log_4(x + 2)$

d. $f(x) = \ln(-x) + 3$

64. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. El dominio de $g(x) = \log(x + 1)$ es $D_f = \mathbb{R}$. ☐

b. La función $h(x) = -2^x + 4$ tiene una asíntota vertical en $x = 4$. ☐

c. La función $f(x) = \ln x$ no tiene asíntota horizontal. ☐

d. La función $f(x) = 3^x - 3$ tiene raíz $x = 1$. ☐

e. La función $g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ es decreciente. ☐

f. La función $h(x) = 2.\log_2 x$ tiene ordenada al origen 2. ☐

g. El punto de coordenadas (1; 1) pertenece a la función $f(x) = \log(x + 9)$. ☐

h. El punto de coordenadas (1; 6) pertenece a la función $g(x) = 2.3^x$. ☐

65. Para cada función exponencial busquen el dominio, la asíntota y la intersección con los ejes. Luego, grafiquen en sus carpetas.

a. $f(x) = 5^x - 1$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} - 4$

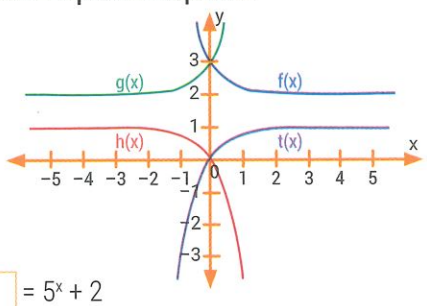
c. $f(x) = -3^x + 3$

d. $f(x) = 2 - 2x$

e. $f(x) = 6^{-x}$

f. $f(x) = -\frac{1}{5^x} + 1$

66. Observen los gráficos y completen con la letra de la función que corresponde.



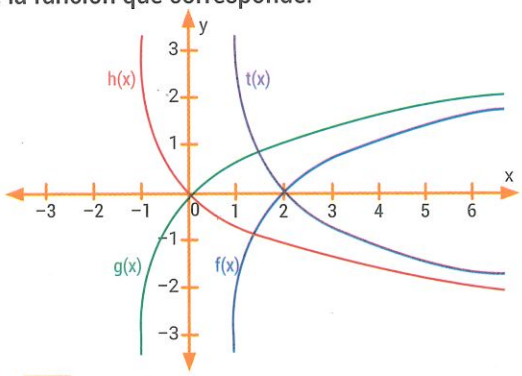
a. ☐ $= 5^x + 2$

b. ☐ $= \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$

c. ☐ $= -5^x + 1$

d. ☐ $= -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$

67. Observen los gráficos y completen con la letra de la función que corresponde.



a. ☐ $= -\ln(x + 1)$

b. ☐ $= \ln(x + 1)$

c. ☐ $= -\ln(x - 1)$

d. ☐ $= \ln(x - 1)$

68. Calculen lo pedido en cada caso.

a. La raíz de $f(x) = \log(3x - 1)$.

b. La ordenada al origen de $f(x) = -4^x$.

c. El dominio de $f(x) = \log(6 - 3x)$.

d. La asíntota vertical de $f(x) = \ln(7x)$.

e. La raíz de $f(x) = -25 + 5^{2x-4}$.

f. La ordenada al origen de $f(x) = -\log x$.

g. La asíntota horizontal de $f(x) = 7^{x-1}$.

h. El dominio de $f(x) = e^x$.

69. Reconstruyan la fórmula, y luego grafiquen, de una función de la forma $y = k \cdot a^x$, sabiendo que pasa por los puntos $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ y $(4; 162)$.

70. Marquen con una X las afirmaciones que son correctas.

a. La función $f(x) = 2^x - 4$ tiene la misma raíz que $g(x) = \log_2 x - 1$. ☐

b. La función $f(x) = \ln x$ tiene la misma asíntota que $g(x) = 3^x$. ☐

c. La función $f(x) = 5^{x-1}$ y $g(x) = 2^x$ pasan por el punto $(1; -1)$. ☐

d. La función $f(x) = \log(2x)$ tiene la misma imagen que $g(x) = \ln x$. ☐

e. La ordenada al origen de la función $f(x) = \log_3(x + 1)$ es la misma ordenada que de la función $g(x) = 7^x - 1$. ☐

f. La función $f(x) = e^x$ es la inversa de la función $g(x) = \ln x$. ☐

71. Escriban la fórmula de una función logarítmica cuya gráfica, tomando como referencia $y = \log x$, cumpla lo pedido en cada caso.

a. Se corre 9 lugares hacia arriba.

b. Se corre 7 lugares hacia la derecha.

c. Se corre 6 lugares hacia abajo.

d. Se corre 1 lugar hacia la izquierda.

72. Tengan en cuenta que para calcular el pH de una solución se utiliza la función: $pH = -\log [H+]$, donde $[H+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, y resuelvan.

a. Definan D_f.

b. Completen la tabla.

Sustancia	[H+]	pH
Agua pura	10^{-7}	
Agua de mar		8,5
Jugo de limón	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	
Leche		6,5

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Propiedades de la potenciación

Propiedades	Ejemplos
$\sqrt[m]{a^n} = x^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[5]{a^2} = x^{\frac{2}{3}}$
$x^m = x^n \Leftrightarrow m = n$	$x^3 = x^y \Leftrightarrow 3 = y$
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$x^6 \cdot x^7 = x^{6+7} = x^{13}$
$x^m : x^n = x^{m-n}$	$x^9 : x^4 = x^{9-4} = x^5$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$
$x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m}$	$x^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

Dominio de una función (D_f)

Es el conjunto formado por los valores que puede tomar la variable "x".

Imagen de una función (I_f)

Es el conjunto formado por los valores de "y" que toma la función.

Asíntotas

La **asíntota** de una función es una recta a la que la gráfica de la función se aproxima continuamente; es decir que la distancia entre las dos tiende a ser cero.

- Asíntota horizontal → Ecuación y = c.
- Asíntota vertical → Ecuación x = c.

Raíces (o ceros) de una función. Ordenada al origen

- Las **raíces** de una función y = f(x) son los valores de x (pertenecientes al dominio) en los cuales f(x) es igual a 0.
- La **ordenada al origen** es el valor de y para x = 0.

La **representación gráfica** de una función es el conjunto de todos los puntos (x; y), para los cuales se cumple que y = f(x).
Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la función y = x cuyo gráfico es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

6 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

73. ¿Cuál de estas es la expresión reducida de $2 . \ln x + \frac{1}{2} . \ln y$?

○ $\ln\left(2x + \frac{1}{2}y\right)$ ○ $\ln x^2 . \sqrt{y}$ ○ $\ln\left(2x . \frac{1}{2}y\right)$ ○ $\ln(x^2 . \sqrt{y})$

74. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\log x + \log(x - 48) = 2$?

○ -2 ○ 50 ○ $\emptyset$ ○ -2 y 50

75. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es exponencial?

○ $(x + 1)^2 - 1 = 0$ ○ $x^e = 1$ ○ $1 + x^{-1} = \ln 6$ ○ $-5^x = 0$

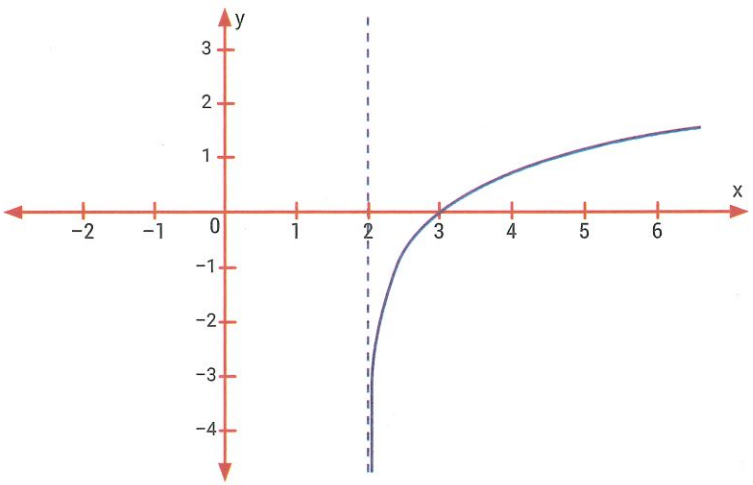
76. ¿Cuál es la solución de la ecuación $4^x - 2 . 2^x = 8$?

○ -2 y 4 ○ -1 ○ 2 ○ -1 y 2

77. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3 + \log_2(5 - 10x)$?

○ $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ○ $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ○ $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ○ $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

78. ¿Cuál es la fórmula de la función representada en el siguiente gráfico?



○ $f(x) = \ln x + 2$ ○ $f(x) = \ln x - 2$ ○ $f(x) = \ln(x + 2)$ ○ $f(x) = \ln(x - 2)$

79. ¿Cuál es la ecuación de la asíntota de la función $f(x) = -2 . 3^x + 2$?

○ $x = 2$ ○ $x = -2$ ○ $y = 2$ ○ $y = -2$

80. ¿Cuál es la imagen de la función $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x} - 3$?

Para recordar pág. 129

○ $(-3; +\infty)$ ○ $(-\infty; 3)$ ○ $(-\infty; -3)$ ○ $(3; +\infty)$

7 Trigonometría

36. Sistema de medición de ángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

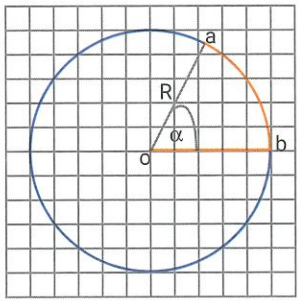
Para **medir ángulos** se utilizan distintos sistemas de medición.

- **Sistema sexagesimal**: la unidad de medida en este sistema es el **grado sexagesimal** (1°), que se obtiene al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

Para recordar pág. 155

$$1° = \frac{1 \text{ recto}}{90} \Rightarrow 1 \text{ recto} = 90°$$

- **Sistema circular**: la unidad de medida en este sistema es el **radián**. Se llama radián al ángulo central que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.



$r = \overline{ob}$

$\widehat{ab} = \overline{ob}$

$\hat{\alpha} = 1$ radián

$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{ab}}{\overline{ob}}$

Equivalencia entre los sistemas

Los ángulos centrales son proporcionales a los arcos que intersecan, por lo tanto:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\widehat{ab}} = \frac{360°}{\text{long } C(o;\overline{ob})} \Rightarrow \frac{1 \text{ radián}}{\overline{ob}} = \frac{360°}{2\pi\,\overline{ob}} \Rightarrow \frac{2\pi\,\overline{ob}}{\overline{ob}} = 360° \Rightarrow \mathbf{2\pi = 360°}$$

Para transformar medidas de grados a radianes podemos usar la proporción:

$$\frac{\hat{\alpha}(\text{grados})}{180°} = \frac{\hat{\alpha}(\text{radianes})}{\pi}$$

¿A cuántos radianes equivale un ángulo de 45°?

$$\frac{45°}{180°} = \frac{\hat{\alpha}}{\pi} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{45° \cdot \pi}{180°} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{4}\pi$$

¿A cuántos grados equivale un ángulo de $\frac{1}{6}\pi$?

$$\frac{\frac{1}{6}\pi}{\pi} = \frac{\hat{\alpha}}{180°} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\frac{1}{6}\pi \cdot 180°}{\pi} \Rightarrow \hat{\alpha} = 30°$$

En la siguiente tabla figuran algunas equivalencias entre los dos sistemas de medición de ángulos.

Sistema sexagesimal	30°	45°	60°	90°	180°
Sistema circular	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π

ACTIVIDADES

36. Sistema de medición de ángulos

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   - a. Teniendo en cuenta que $\pi \cong 3{,}14$, ¿es cierto que 90° equivale a 1,57 radianes?
   - b. ¿Es cierto que 1 radián equivale a 57° 17' 45"?
   - c. La unidad de medida en otro sistema es de 1 G. Se obtiene al dividir el ángulo recto en 100 partes iguales. En este sistema ¿a qué equivale el ángulo de 2π?

2. **Completen la siguiente tabla.**

Sistema sexagesimal	Sistema circular
210°	
	3,14 radianes
300°	
	$\frac{3}{2}\pi$
45°	
	0

3. **Expresen los siguientes ángulos en radianes, en función de π.**

a. 25° = _____ c. 150° = _____ e. 330° = _____

b. 160° = _____ d. 50° = _____ f. 225° = _____

4. **Calculen los siguientes ángulos en grados sexagesimales.**

a. $\frac{\pi}{6}$ = _____ c. $\frac{3}{4}\pi$ = _____ e. $\frac{4}{3}\pi$ = _____

b. $\frac{2}{5}\pi$ = _____ d. $\frac{5}{2}\pi$ = _____ f. $\pi - \frac{\pi}{3}$ = _____

5. **Resuelvan sabiendo que $\hat{\alpha} = 130°$; $\hat{\beta} = 25°$; $\hat{\gamma} = 210°$.**

a. Expresen cada ángulo en radianes.

- $\hat{\alpha}$ = _____
- $\hat{\beta}$ = _____
- $\hat{\gamma}$ = _____

b. Utilizando los resultados expresados en radianes, obtengan lo pedido en cada caso:

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ = _____
- $\frac{\hat{\gamma}}{2} - 2\hat{\beta}$ = _____

6. **Lean atentamente y resuelvan.**

El ángulo central de un círculo de 20 cm de radio abarca un arco de 4 cm. Calculen el valor de ese ángulo en radianes y en grados. Consideren $\pi = 3{,}14$.

_____

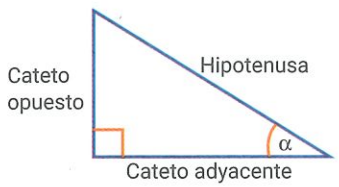
_____

- Sistema sexagesimal: $\hat{\alpha}$ = _____
- Sistema circular: $\hat{\alpha}$ = _____

37. Razones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llaman **razones trigonométricas** a las que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.

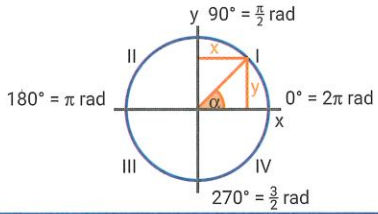


Razones directas		Razones recíprocas	
Seno	$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto op.}}{\text{hipotenusa}}$	Cosecante	$\text{cosec}\ \hat{\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\ \hat{\alpha}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto op.}}$
Coseno	$\cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto ady.}}{\text{hipotenusa}}$	Secante	$\sec \hat{\alpha} = \frac{1}{\cos \hat{\alpha}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto ady.}}$
Tangente	$\text{tg}\ \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto op.}}{\text{cateto ady.}}$	Cotangente	$\text{cotg}\ \hat{\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\ \hat{\alpha}} = \frac{\text{cateto ady.}}{\text{cateto op.}}$

• La **circunferencia trigonométrica** es aquella de radio 1 y cuyo centro coincide con el origen de coordenadas. Según el cuadrante en donde se ubica el ángulo, las razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas.

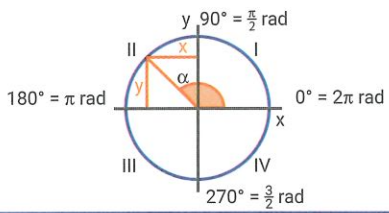
Cuadrante I

$0° < \hat{\alpha} < 90°$, $\text{sen}\ \hat{\alpha} > 0$; $\cos \hat{\alpha} > 0$; $\text{tg}\ \hat{\alpha} > 0$



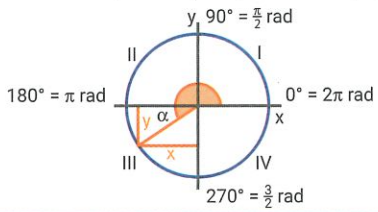
Cuadrante II

$90° < \hat{\alpha} < 180°$, $\text{sen}\ \hat{\alpha} > 0$; $\cos \hat{\alpha} < 0$; $\text{tg}\ \hat{\alpha} < 0$



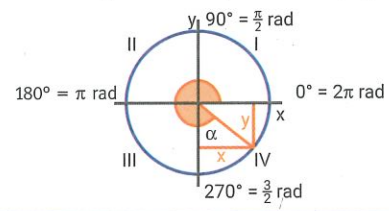
Cuadrante III

$180° < \hat{\alpha} < 270°$, $\text{sen}\ \hat{\alpha} < 0$; $\cos \hat{\alpha} < 0$; $\text{tg}\ \hat{\alpha} > 0$



Cuadrante IV

$270° < \hat{\alpha} < 360°$, $\text{sen}\ \hat{\alpha} < 0$; $\cos \hat{\alpha} > 0$; $\text{tg}\ \hat{\alpha} < 0$



• Las **identidades trigonométricas** son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Para demostrar o resolver una identidad trigonométrica se desarrollan uno o ambos miembros de ella, tratando de obtener expresiones equivalentes.

Para ello, se utilizan las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo y las siguientes relaciones.

Relación pitagórica: $\text{sen}^2 \hat{\alpha} + \cos^2 \hat{\alpha} = 1$ $\qquad$ $\text{tg}\ \hat{\alpha} = \frac{\text{sen}\ \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}}$

Verifiquen las siguientes identidades.

a. $\cos \hat{\alpha} \,.\, \text{cosec}\ \hat{\alpha} = \text{cotg}\ \hat{\alpha}$

$$\cos \hat{\alpha} \,.\, \frac{1}{\text{sen}\ \hat{\alpha}} = \text{cotg}\ \hat{\alpha}$$

$$\frac{\cos \hat{\alpha}}{\text{sen}\ \hat{\alpha}} = \text{cotg}\ \hat{\alpha}$$

$$\text{cotg}\ \hat{\alpha} = \text{cotg}\ \hat{\alpha}$$

b. $\dfrac{\text{sen}^2 \hat{\alpha}}{1 + \cos \hat{\alpha}} = 1 - \cos \hat{\alpha}$

$$\frac{1 - \cos^2 \hat{\alpha}}{1 + \cos \hat{\alpha}} = 1 - \cos \hat{\alpha}$$

$$\frac{(1 - \cos \hat{\alpha}) \,.\, (1 + \cos \hat{\alpha})}{1 + \cos \hat{\alpha}} = 1 - \cos \hat{\alpha}$$

$$1 - \cos \hat{\alpha} = 1 - \cos \hat{\alpha}$$

ACTIVIDADES

37. Razones trigonométricas

Test de comprensión

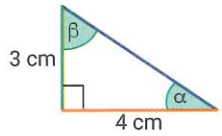
7. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En un triángulo rectángulo, si cos $\hat{\alpha}$ = sen $\hat{\alpha}$, ¿el triángulo es isósceles?

b. ¿Es cierto que |sen 210°| = sen 30°?

c. ¿Es posible que el seno de un ángulo sea mayor que 1? ¿Por qué?

8. Tengan en cuenta el siguiente triángulo rectángulo y resuelvan.



a. Calculen el valor de la hipotenusa.

Para recordar pág. 155

Hipotenusa = _____

b. Completen la tabla.

Ángulo	Seno	Coseno
$\hat{\alpha}$		
$\hat{\beta}$		

c. Marquen con una X según el tipo de ángulos que son $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

- Suplementarios. ☐
- Complementarios. ☐
- Ninguna de las anteriores. ☐

d. Observen la tabla del ítem b y enuncien una propiedad que vincule los resultados.

_____

_____

9. Resuelvan usando la calculadora. Para los ítems a y b, tengan en cuenta $\varepsilon < 0{,}01$.

a. sen 38° = _____

b. cos 210° = _____

c. sec 60° = _____

d. tg 45° = _____

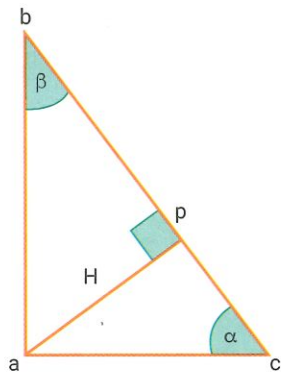
e. sen $\hat{\alpha} = 0{,}5 \Rightarrow \hat{\alpha}$ = _____

f. cos $\hat{\beta} = -0{,}6 \Rightarrow \hat{\beta}$ = _____

g. tg $\hat{\delta} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{\delta}$ = _____

h. cos $\hat{\gamma} = 0 \Rightarrow \hat{\gamma}$ = _____

10. Observen el triángulo rectángulo donde H es la altura que corresponde a la hipotenusa y resuelvan.



a. Escriban H en función del sen $\hat{\beta}$.

H = _____

b. Escriban H en función del sen $\hat{\alpha}$.

H = _____

c. Escriban $\overline{bc}$ en función del cos $\hat{\beta}$.

$\overline{bc}$ = _____

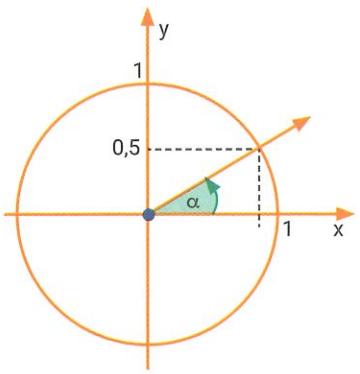
d. Escriban $\overline{bc}$ en función del cos $\hat{\alpha}$.

$\overline{bc}$ = _____

37. Razones trigonométricas

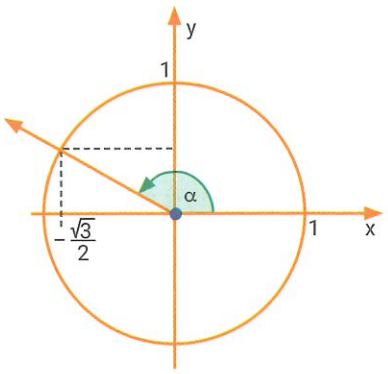
11. Tengan en cuenta que la circunferencia es trigonométrica y escriban en cada caso la razón trigonométrica solicitada.

a.



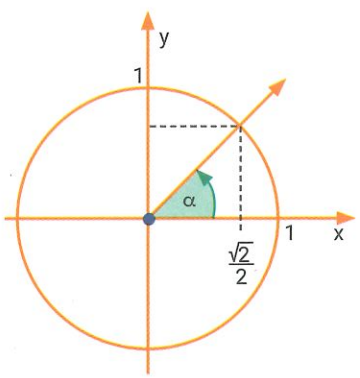
sen $\hat{\alpha}$ = _____

c.



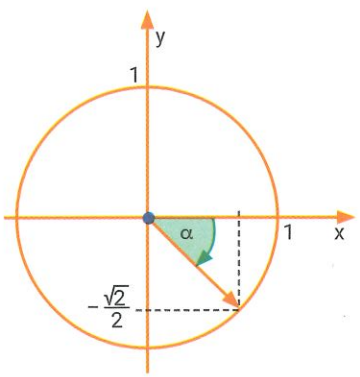
sec $\hat{\alpha}$ = _____

b.



cos $\hat{\alpha}$ = _____

d.



cosec $\hat{\alpha}$ = _____

12. Usando la calculadora, hallen el valor de los ángulos anteriores en grados sexagesimales y en radianes. Tengan en cuenta que se considera negativo a todo ángulo que gira en el mismo sentido que las agujas del reloj.

a. $\hat{\alpha}$ = ____ ° = _____ radianes

b. $\hat{\alpha}$ = ____ ° = _____ radianes

c. $\hat{\alpha}$ = ____ ° = _____ radianes

d. $\hat{\alpha}$ = ____ ° = _____ radianes

13. Tengan en cuenta los datos y calculen las razones trigonométricas de los ángulos agudos pedidos.

a. sen $\hat{\alpha}$ = 0,5

_____

_____

_____

tg $\hat{\alpha}$ = _____

b. sec $\hat{\alpha}$ = 2

_____

_____

_____

sen $\hat{\alpha}$ = _____

c. sec $\hat{\alpha} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

_____

_____

_____

sen $\hat{\alpha}$ = _____

37. Razones trigonométricas

14. Indiquen a qué ángulos positivos equivalen los siguientes ángulos negativos.

a. $\hat{\alpha} = -30° =$ ☐ b. $\hat{\beta} = -135° =$ ☐ c. $\hat{\gamma} = -240° =$ ☐ d. $\hat{\varepsilon} = -380° =$ ☐

15. Sabiendo que $\text{tg}^2\,\hat{\alpha} = 3$ y $\hat{\alpha}$ es agudo, calculen los valores exactos en cada caso.

a. $\text{sen}\,\hat{\alpha} =$ _____

b. $\cos\hat{\alpha} =$ _____

c. $(\text{sen}\,\hat{\alpha} + 2\,.\cos\hat{\alpha})\,.\,\text{tg}\,\hat{\alpha} =$ _____

16. Verifiquen las siguientes identidades.

a. $(1 - \text{sen}\,\hat{\alpha})\,.\,(1 + \text{sen}\,\hat{\alpha}) = \cos^2\hat{\alpha}$

b. $\text{cotg}\,\hat{\alpha}\,.\,\text{sen}\,\hat{\alpha} = \cos\hat{\alpha}$

c. $\text{sen}\,\hat{\alpha}\,.\,\sec\hat{\alpha} = \text{tg}\,\hat{\alpha}$

d. $\text{cosec}^2\,\hat{\alpha}\,.\,(1 - \cos^2\hat{\alpha}) = 1$

e. $\dfrac{1}{1 - \text{sen}\,\hat{\alpha}} + \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,\hat{\alpha}} = 2\,.\,\sec^2\hat{\alpha}$

f. $1 - \sec^2\hat{\alpha} = -\text{tg}^2\,\hat{\alpha}$

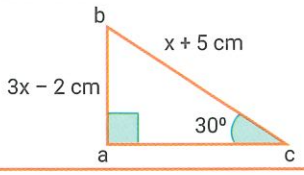
g. $(\text{sen}\,\hat{\alpha} + \cos\hat{\alpha})^2 = 2\,.\,\text{tg}\,\hat{\alpha}\,.\cos^2\hat{\alpha} + 1$

h. $\cos\hat{\alpha}\,.\,(\text{tg}\,\hat{\alpha} + 1) - \cos\hat{\alpha} = \text{sen}\,\hat{\alpha}$

DinámicaMente

Observen el gráfico y calculen lo pedido en cada caso.

a. x = ☐ b. Perímetro del triángulo abc = ☐



38. Valores exactos. Relación con el cuadrante I

▶ SABERES DINÁMICOS

Valores exactos

La tabla muestra los **valores exactos de las funciones trigonométricas** de ángulos particulares.

	$0°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\operatorname{sen} \hat{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \hat{\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \hat{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe.

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo del cuadrante I

Las funciones trigonométricas de ángulos de cualquier cuadrante se pueden relacionar con funciones trigonométricas de ángulos del cuadrante I.

Ángulos complementarios $\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° = \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}\right)$ v $\cos \hat{\alpha} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}\right)$

Ángulos suplementarios $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180° = \pi)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \operatorname{sen}(\pi - \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = -\cos(\pi - \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(\pi - \hat{\alpha})$

Ángulos que difieren de π

$(\pi < \hat{\alpha} < \frac{3}{2}\pi)$ v $(180° < \hat{\alpha} < 270°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(\hat{\alpha} - \pi)$

$\cos \hat{\alpha} = -\cos(\hat{\alpha} - \pi)$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \operatorname{tg}(\hat{\alpha} - \pi)$

Ángulos que difieren de 2π

$(\hat{\alpha} > 2\pi)$ v $(\hat{\alpha} > 360°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \operatorname{sen}(2\pi + \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(2\pi + \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \operatorname{tg}(2\pi + \hat{\alpha})$

Ángulos que suman 2π

$(\pi < \hat{\alpha} < 2\pi)$ v $(270° < \hat{\alpha} < 360°)$

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(2\pi - \hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(2\pi - \hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(2\pi + \hat{\alpha})$

Ángulos opuestos

$\operatorname{sen} \hat{\alpha} = -\operatorname{sen}(-\hat{\alpha})$

$\cos \hat{\alpha} = \cos(-\hat{\alpha})$

$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = -\operatorname{tg}(-\hat{\alpha})$

Escriban cada expresión trigonométrica como una expresión de un ángulo del primer cuadrante. Luego, resuelvan.

a. $\operatorname{sen} 240° = -\operatorname{sen}(180° + 60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg}(360° - 330°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

e. $\operatorname{cosec}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/1cuad * para mirar un video donde se explica cómo se reducen razones trigonométricas para que tengan ángulos en el primer cuadrante.

* Enlace acortado de https://youtu.be/VUa71uPOx5I

ACTIVIDADES

38. Valores exactos. Relación con el cuadrante I

Test de comprensión

17. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Si $\cos \hat{\alpha} < 0$ y $\operatorname{tg} \hat{\alpha} > 0$, ¿es cierto que $\frac{3}{2}\pi \leq \hat{\alpha} \leq 2\pi$?

b. ¿Es cierto que $\operatorname{sen}^2(-\hat{\alpha}) + \cos^2(-\hat{\alpha}) = -1$?

c. Si $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿es cierto que $\cos(\pi - \hat{\alpha}) = -0{,}5$?

18. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{4}$ ☐

b. $\cos \frac{\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8}$ ☐

c. $\operatorname{sen}^2 60° = 1 - \operatorname{sen}^2 30°$ ☐

d. $\operatorname{sen}(-45°) = \operatorname{sen} 315°$ ☐

e. $\operatorname{tg} 315° = \operatorname{tg} 135°$ ☐

f. $\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ ☐

19. Tengan en cuenta los datos dados y calculen los valores exactos de las razones solicitadas.

a. $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = 0{,}5$ y $\hat{\alpha} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$\sec \hat{\alpha} =$ _____

b. $\cos \hat{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $270° \leq \hat{\beta} \leq 360$

$\operatorname{cosec} \hat{\beta} =$ _____

c. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\delta}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $0 < \hat{\delta} < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{cotg} \hat{\delta} =$ _____

d. $\cos \hat{\gamma} = \frac{1}{2}$ y $0 < \hat{\gamma} < \frac{\pi}{2}$

$\sec(5\pi + \hat{\gamma}) =$ _____

20. Resuelvan buscando la equivalencia con un ángulo del primer cuadrante.

a. $\operatorname{sen} 330° - \cos 210° + \operatorname{tg} 135° =$

_____

b. $2 \cdot \operatorname{sen} 480° - \operatorname{tg}(-60°) =$

_____

c. $\operatorname{sen}^2\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

_____

d. $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) : \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) =$

_____

21. Reúnanse con un compañero, lean atentamente y resuelvan.

Eratóstenes en el año 240 a. C. calculó de manera muy aproximada la longitud del radio de la circunferencia de la Tierra. Sabía que durante el solsticio de verano, las sombras que se proyectaban entre dos ciudades alejadas eran distintas. En Siena los objetos no proyectaban sombra (los rayos del sol eran perpendiculares al suelo) y en Alejandría, sí (midió la sombra de una vara de 1 m y obtuvo 12,6 cm).

a. Usando las razones trigonométricas, calculen el valor de $\hat{\alpha}$.

_____

b. Calculen el valor del ángulo central $\hat{\beta}$. Expliquen la respuesta.

Para recordar pág. 155

_____

c. Calculen el valor de la longitud de la circunferencia de la Tierra a partir de los cálculos de Eratóstenes, sabiendo que la distancia que separa a ambas ciudades es de 800 km.

_____

39. Ecuaciones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas en las que la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Se pueden resolver utilizando distintos procedimientos.

Los siguientes son ejemplos de la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Hallen los valores de $x \in [0; 2\pi)$ que hacen verdaderas las ecuaciones.

a. $2 . \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$ — Se despeja sen x.

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — Tiene dos soluciones (1 y 2).

$x = \frac{\pi}{3}$ — 1. Se busca en la tabla.

$x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi$ — 2. Porque sen x = sen (π − x).

Solución: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right\}$

b. $4 . \cos x - 1 = 3$ — Se despeja cos x.

$\cos x = 1$ — Tiene una solución.

$x = 0$ — Se busca en la tabla.

Solución: $\{0\}$

c. $tg^2 x = 3$ — Se despeja tg x.

$|tg\, x| = \sqrt{3} \Rightarrow tg\, x = \pm\sqrt{3}$ — Tiene cuatro soluciones (1, 2, 3 y 4).

$tg\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ — 1. Se busca en la tabla.

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi$ — 2. Porque $tg\, x = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$.

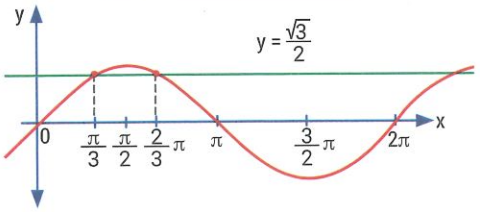
$tg\, x = -\sqrt{3}$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi$ — 3. Se busca en la tabla.

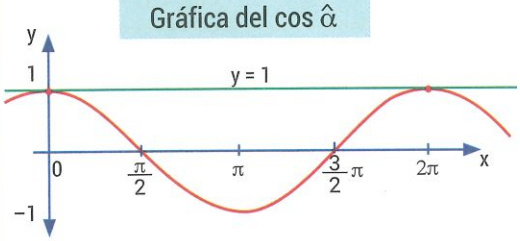
$\Rightarrow x = \frac{5}{3}\pi$ — 4. Porque $tg\, x = -tg\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$

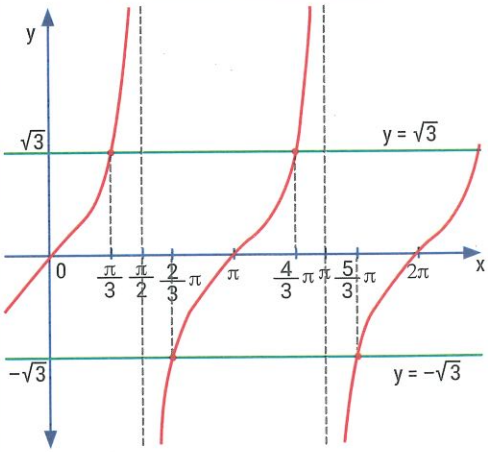
Gráfica del sen $\hat{\alpha}$



Gráfica del cos $\hat{\alpha}$



Gráfica de la tg $\hat{\alpha}$



d. $2 . \cos^2 x + \cos x = 1$

$2z^2 + z - 1 = 0$ — Se sustituye "cos x" por "z", se iguala a 0 y se resuelve la cuadrática.

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 . 2 . (-1)}}{2 . 2} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}; z_2 = -1$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5}{3}\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Solución: $\left\{\frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5}{3}\pi\right\}$

39. Ecuaciones trigonométricas

Test de comprensión

22. Respondan y expliquen las respuestas.

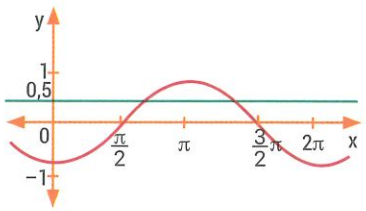
a. La ecuación $2.\text{sen } x + 1 = 0$ ¿tiene solución en el intervalo $[0; \pi]$?

b. Si $f(x) = \cos x$, ¿$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$?

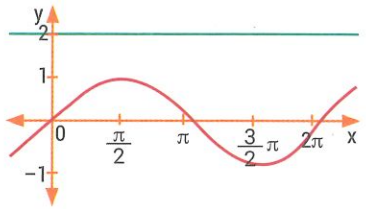
c. Si $\cos(2x) = 1$, ¿$x = 7\pi$ es una solución?

23. Resuelvan e interpreten gráficamente $f(x) = g(x)$, para $x \in [0; 2\pi)$.

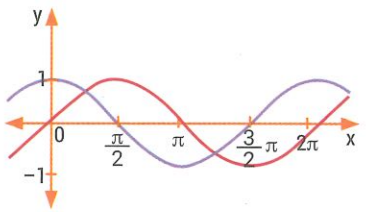
a. $f(x) = -\cos x$; $g(x) = \frac{1}{2}$



b. $f(x) = \text{sen } x$; $g(x) = 2$



c. $f(x) = \text{sen } x$; $g(x) = \cos x$



24. Encuentren los valores de $x \in [0; 2\pi)$ que verifiquen las ecuaciones.

a. $\sqrt{2}\,\text{cotg } x.\text{sen } x = 1$

b. $-\sqrt{3}.\text{tg } x - 1 = 0$

c. $4.\cos^2 x - 1 = 0$

d. $(\text{sen } x + 1).\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$

e. $2.\text{tg } x.\text{sen } x = 3$

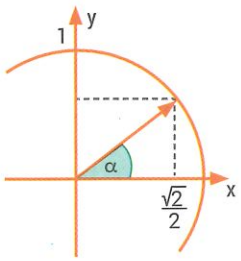
f. $\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}.\text{sen } x = \frac{1}{2}$

g. $\cos^2 x - 7\,\text{sen}^2 x + 3 = 0$

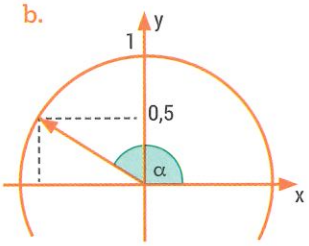
h. $\sec^2 x - 1 = 3$

25. Calculen el valor de $\hat{\alpha}$ en las siguientes figuras. Expresen $\hat{\alpha}$ en grados sexagesimales y en radianes.

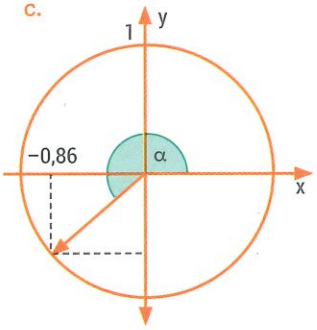
a.



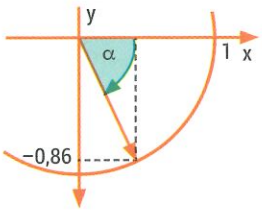
b.



c.



d.



26. Marquen las opciones correctas.

a. Si $\text{tg}\,\hat{\alpha} = -\sqrt{3}$ y $\hat{\alpha} \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, ¿cuál es valor del $\text{sen}\,\hat{\alpha}$?

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐
- $-\frac{1}{2}$ ☐

b. Si $\text{sec}\,\hat{\gamma} = 2 \wedge \hat{\gamma} < 90°$, ¿cuál es el valor del $\hat{\gamma}$?

- $\frac{\pi}{3}$ ☐
- $\frac{\pi}{4}$ ☐
- $\frac{\pi}{6}$ ☐

27. Hallen el valor de los ángulos pertenecientes al $[0; 90°)$.

a. $\text{cotg}\,\hat{\alpha} = 1$

b. $\text{cosec}\,\hat{\beta} = 4$

c. $\text{sec}\,\hat{\gamma} = 1$

d. $\text{sen}\,\hat{\delta} = 0{,}94$

28. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. Si el seno de un ángulo es $\frac{1}{3}$, su cosecante es -3. ☐

b. Si $\text{sen}\,\hat{\alpha} < 0$ y $\cos\hat{\alpha} < 0$, $\hat{\alpha} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. ☐

c. Si $\text{sen}\,\hat{\alpha} = \cos 40°$, $\hat{\alpha} = 50°$. ☐

d. $\text{sen}^2\,\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\beta} = 1$ ☐

e. La secante de un ángulo es igual a la inversa del coseno del ángulo opuesto. ☐

f. Si $\text{tg}\,\hat{\alpha} = -1$ y $0° < \hat{\alpha} < 180°$, $\cos\hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ☐

g. El producto entre el $\text{sen}\,\hat{\alpha}$ y la $\text{sec}\,\hat{\alpha} = 1$. ☐

29. Comprueben las siguientes identidades.

a. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}\right) + \cos\hat{\alpha} = \frac{2}{\text{sec}\,\hat{\alpha}}$

b. $\text{sen}\,\hat{\alpha} + \cos\hat{\alpha} = \cos\hat{\alpha} \,.\, (1 + \text{tg}\,\hat{\alpha})$

c. $(\cos\hat{\alpha} - \text{sen}\,\hat{\alpha})^2 = (\text{sen}\,\hat{\alpha} - \cos\hat{\alpha})^2$

d. $\cos^2\hat{\alpha} = (1 + \text{tg}^2\,\hat{\alpha})^{-1}$

e. $\frac{\text{sen}^2\,\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} + \cos\hat{\alpha} - \text{sec}\,\hat{\alpha} = 0$

f. $\cos^2(180° - \hat{\alpha}) + \text{sen}^2(180° + \hat{\alpha}) = \cos\hat{\alpha} \,.\, \text{sec}\,\hat{\alpha}$

g. $(1 + \text{sen}\,\hat{\alpha}) \,.\, (1 - \text{sen}\,\hat{\alpha}) = \text{sec}^{-2}\,\hat{\alpha}$

h. $\frac{1 + \text{tg}\,\hat{\alpha}}{1\ \text{ctg}\,\hat{\alpha}} = \text{tg}\,\hat{\alpha}$

i. $1 - \cos^2\hat{\alpha} - \text{sen}\,\hat{\alpha} \,.\, \cos\hat{\alpha} = \text{sen}\,\hat{\alpha} \,.\, (\text{sen}\,\hat{\alpha} - \cos\hat{\alpha})$

30. Expresen cada relación en función del cos $\hat{\alpha}$, con $\hat{\alpha} < 90°$.

a. $\sec \hat{\alpha} =$

b. $\operatorname{sen} \hat{\alpha} =$

c. $\operatorname{cotg} \hat{\alpha} =$

d. $\operatorname{cosec} \hat{\alpha} =$

e. $\operatorname{sen}(90° - \hat{\alpha}) =$

f. $\cos(180° + \hat{\alpha}) =$

31. Expresen en función de ángulos del primer cuadrante.

a. $f(x) = \cos \frac{5}{3}\pi =$

b. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{9}{4}\pi =$

c. $f(x) = \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

d. $f(x) = \operatorname{cotg} \frac{7}{6}\pi =$

32. Hallen las soluciones de la ecuación $\cos x = -0{,}5$ en el intervalo $[\pi; 2\pi)$.

33. Hallen los valores de x en cada caso.

a. $\operatorname{tg}(x - 60°) = \operatorname{cotg} x \wedge x \in [0°; 90°]$

b. $\operatorname{sen}(3x + 10°) = \operatorname{sen} x \wedge x \in [0°; 90°]$

c. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0 \wedge x \in [0; 2\pi]$

d. $\cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = 1 \wedge x \in [0; 2\pi)$

e. $2 . \cos x - 1 = 0 \wedge x \in \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

f. $2 . \cos^2 x - 14 \operatorname{sen}^2 x = -6 \wedge x \in [0; 90°)$

g. $\cos^2 x + 2 . \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = 2 \wedge x \in [0; 2\pi]$

h. $4 . \cos(-x) . \cos(360° + x) = 1 \wedge x \in [0°; 360°)$

34. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. $\sec\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ☐

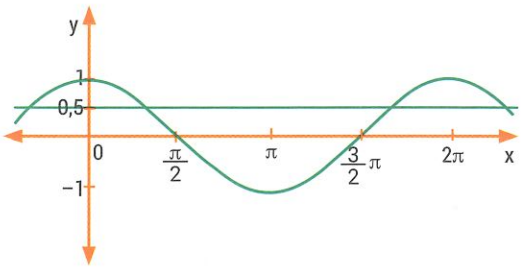
b. El coseno de un ángulo es positivo en el tercer o en el cuarto cuadrante. ☐

c. Si $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = \frac{1}{2} \wedge \sec \hat{\alpha} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\hat{\alpha} = \frac{5}{6}\pi$. ☐

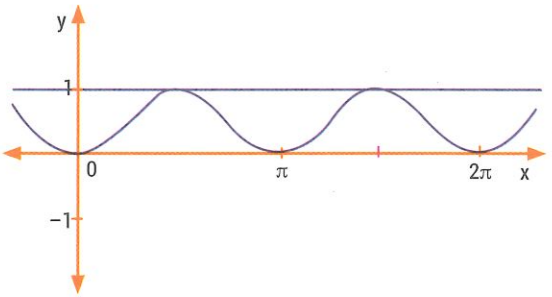
d. La cosecante de un ángulo es igual a la inversa del seno del ángulo suplementario. ☐

35. Observen los gráficos. Hallen los $x \in [0; 2\pi)$, tales que $f(x) = g(x)$. Márquenlos en el gráfico.

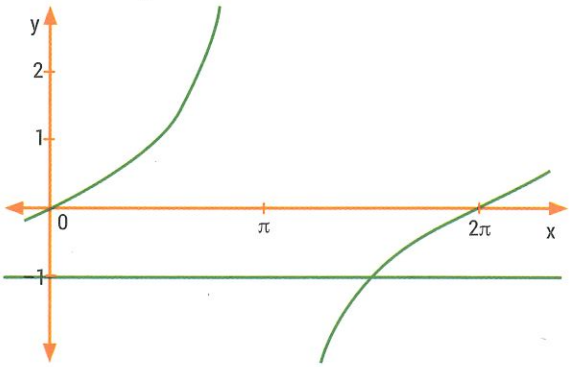
a. $f(x) = \cos x$; $g(x) = 0{,}5$



b. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$; $g(x) = 1$



c. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $g(x) = -1$



40. Triángulos rectángulos

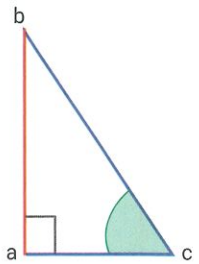
▶ SABERES DINÁMICOS

Resolver un triángulo rectángulo consiste en averiguar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus ángulos agudos.
Un triángulo rectángulo queda determinado con dos de sus lados o con un lado y uno de sus ángulos agudos.

Resuelvan los siguientes triángulos rectángulos.

a. *Datos:* $\overline{ab} = 6\ cm$; $\hat{c} = 30°$

Hallen: $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ *y* $\hat{b}$.



Para calcular $\overline{ac}$ *se debe recurrir a una razón trigonométrica que vincule los datos con el lado:*

$$tg\ \hat{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} \Rightarrow tg\ 30° = \frac{6\ cm}{\overline{ac}} \Rightarrow \overline{ac} = \frac{6\ cm}{tg\ 30°} \Rightarrow \mathbf{\overline{ac} = 6 \cdot \sqrt{3} \cong 10{,}39\ cm}$$

Para calcular $\overline{bc}$ *se razona de forma análoga:*

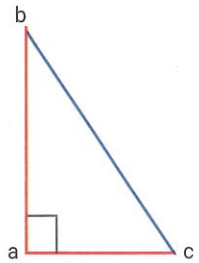
$$sen\ \hat{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow sen\ 30° = \frac{6\ cm}{\overline{bc}} \Rightarrow \overline{bc} = \frac{6\ cm}{sen\ 30°} \Rightarrow \mathbf{\overline{bc} = 12\ cm}$$

Para calcular $\hat{b}$ *se aplica la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo:*

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \Rightarrow \hat{b} = 180° - (90° + 30°) \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 60°}$$

b. *Datos:* $\overline{ab} = 10\ cm$; $\overline{ac} = 7{,}5\ cm$

Hallen: $\overline{bc}$, $\hat{b}$ *y* $\hat{c}$.



Para calcular $\overline{bc}$ *se puede usar el teorema de Pitágoras:*

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 \Rightarrow \overline{bc}^2 = (10\ cm)^2 + (7{,}5\ cm)^2 \Rightarrow \overline{bc}^2 = 100\ cm^2 + 56{,}25\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\overline{bc}^2 = 156{,}25\ cm^2$$

$$\Rightarrow \overline{bc} = \sqrt{156{,}25\ cm^2} \Rightarrow \mathbf{\overline{bc} = 12{,}5\ cm}$$

Para calcular $\hat{b}$ *se debe recurrir a una razón trigonométrica que vincule los datos con el ángulo:*

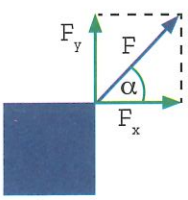
$$tg\ \hat{b} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow tg\ \hat{b} = \frac{7{,}5\ cm}{10\ cm} \Rightarrow \hat{b} = arc\ tg\ \frac{7{,}5\ cm}{10\ cm} \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 36° 52' 11''}$$

Para calcular $\hat{c}$ *se aplica la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo:*

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \Rightarrow \hat{b} = 180° - (90° + 36° 52' 11'') \Rightarrow \mathbf{\hat{c} = 53° 7' 49''}$$

Áreas dinámicas [Matemática y Física]

En Física, se llama trabajo a un proceso de transferencia de energía que ocurre de manera ordenada entre las partes de un sistema que ejercen fuerza entre sí. Para analizar el trabajo de una fuerza cuya dirección no coincide con la dirección del movimiento, se la debe descomponer en dos componentes perpendiculares (F_x; F_y) que se obtienen usando razones trigonométricas.



$F_y = F \cdot sen\ \hat{\alpha}$

$F_x = F \cdot \cos\ \hat{\alpha}$

ACTIVIDADES

40. Triángulos rectángulos

Test de comprensión

36. Respondan y expliquen las respuestas.

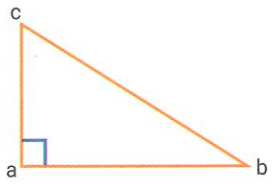
a. Los ángulos agudos del triángulo rectángulo, ¿son complementarios?

b. ¿Se puede resolver un triángulo rectángulo teniendo como datos solo dos de sus ángulos?

c. La expresión de la altura (H) de un triángulo equilátero en función de su lado (L) ¿es $H = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L$?

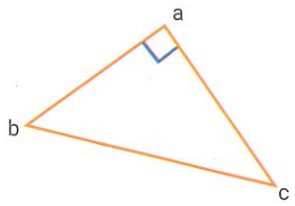
37. Hallen lo pedido en cada caso.

a. Datos: $\overline{ac} = 3$ cm; $\hat{b} = 25°$



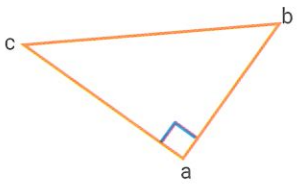
Perímetro $\hat{abc}$ = _____

b. Datos: $\overline{bc} = 6$ cm; $\hat{c} = 65° 30'$



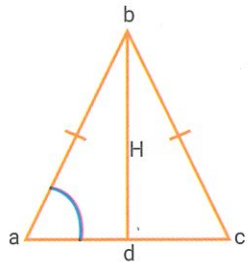
Área $\hat{abc}$ = _____

c. Datos: $\overline{bc} = 12$ cm; $\overline{ac} = 7{,}5$ cm



$\overline{ab}$ = _____ $\hat{b}$ = _____ $\hat{c}$ = _____

d. Datos: abc triángulo isósceles; H es altura; $\hat{a} = 70°$; $H = 6{,}5$ cm

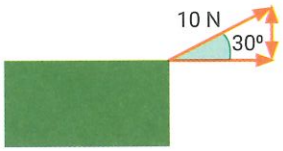


Perímetro $\hat{abc}$ = _____ Área $\hat{abc}$ = _____

40. Triángulos rectángulos

38. Lean atentamente y resuelvan.

a. Sobre un cuerpo se aplica una fuerza de 10 N, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calculen el valor de dos fuerzas, una horizontal y otra vertical, cuyo efecto conjunto sea equivalente al de la primera.



Dato: N (Newton) es la unidad de medida de fuerza

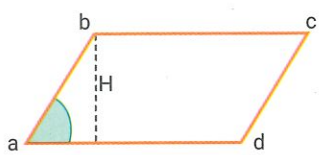
F horizontal = _____

F vertical = _____

b. Calculen el área de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es $6\sqrt{3}$ cm.

c. Calculen la medida de la diagonal de un cuadrado de lado igual a $\sqrt{2}$ cm.

d. Calculen el área del paralelogramo.



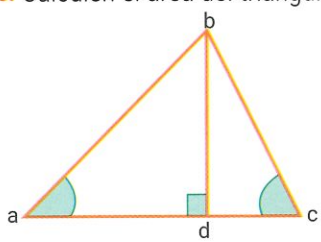
Datos:

$\overline{ab} = 5$ cm

$\overline{bc} = 7$ cm

$\hat{c} = 35°$

e. Calculen el área del triángulo abc.



Datos:

$\overline{ab} = 5$ cm

$\hat{a} = 45°$

$\hat{c} = 63°$

40. Triángulos rectángulos

39. Lean atentamente, realicen un gráfico que represente la situación y resuelvan.

a. La altura de una torre es de 60 m. Se mide con un teodolito ubicado a una determinada distancia de la base y se determina un ángulo de 52°. ¿A qué distancia está ubicado el teodolito?

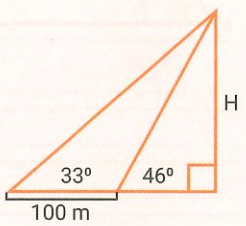
b. Un árbol de 24 m de altura proyecta una sombra de 16 m de longitud. Encuentren el ángulo que forman los rayos del sol en ese momento con la horizontal.

c. Se debe construir una rampa de acceso a un escalón de 30 cm de altura; la distancia desde el escalón hasta el comienzo de la rampa debe ser de 2 metros. ¿Qué ángulo formará la rampa con el piso?

d. ¿Cuál es la altura de un poste si una persona que mide 1,60 m y se encuentra a 3 m de su base, observa su punta con un ángulo de elevación de 60°?

40. Reúnanse con un compañero y resuelvan.

Para medir la altura de un edificio (H) se miden los ángulos de elevación desde dos puntos que están a 100 m de distancia. ¿Cuál es la altura del edificio si los ángulos son 33° y 46°?



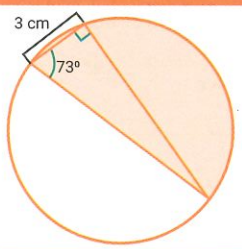
DinámicaMente

Calculen el perímetro y el área de la región sombreada.

Longitud de la circunferencia: $\pi \cdot d$

Área del círculo: $\pi \cdot r^2$

a. Perímetro = ____ b. Área = ____



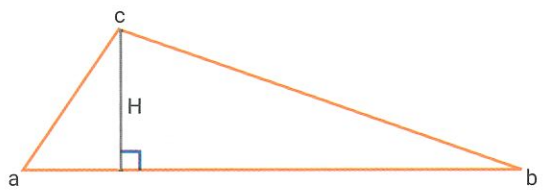
41. Teoremas del seno y del coseno

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **teoremas del seno y del coseno** son dos de los teoremas más usados en trigonometría.

Teorema del seno

Observen que en el siguiente triángulo se cumple:



$\text{sen } \hat{a} = \frac{H}{\overline{ac}}$ ∧ $\text{sen } \hat{b} = \frac{H}{\overline{bc}}$

Despejando H:

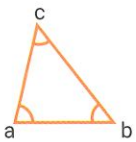
$H = \overline{ac} \cdot \text{sen } \hat{a}$ ∧ $H = \overline{bc} \cdot \text{sen } \hat{b}$

Igualando: $\overline{ac} \cdot \text{sen } \hat{a} = \overline{bc} \cdot \text{sen } \hat{b}$

$$\frac{\overline{ac}}{\text{sen } \hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\text{sen } \hat{a}}$$

Análogamente, se puede determinar que $\frac{\overline{ac}}{\text{sen } \hat{b}} = \frac{\overline{ab}}{\text{sen } \hat{c}}$, por lo tanto, en todo triángulo:

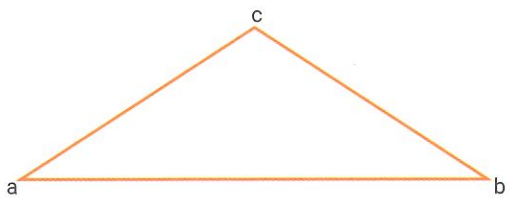
$$\frac{\overline{ab}}{\text{sen } \hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{\text{sen } \hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\text{sen } \hat{a}}$$



En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Teorema del coseno

En todo triángulo se cumple:



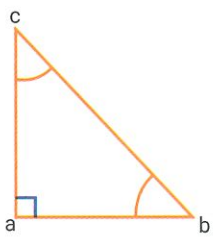
$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot \cos \hat{a}$

$\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 - 2 \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ab} \cdot \cos \hat{b}$

$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ac} \cdot \cos \hat{c}$

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que determinan.

El teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema del coseno.



$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot \cos \hat{a}$

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot \cos 90^\circ$

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$

ACTIVIDADES

41. Teoremas del seno y del coseno

Test de comprensión

41. Respondan y expliquen las respuestas.

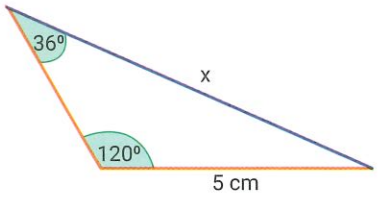
a. El teorema del coseno ¿es un caso particular del teorema de Pitágoras?

b. En todo triángulo ¿los lados son proporcionales a los cosenos de los ángulos opuestos?

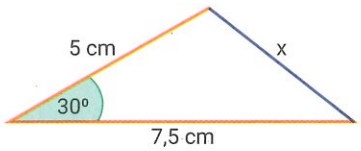
c. En un triángulo abc de base $\overline{ac}$, ¿el área es igual a $\frac{1}{2}\,\overline{ac}\,.\,\overline{bc}\,.\,\text{sen}\,\hat{c}$?

42. Observen los triángulos y calculen el valor de "x" en cada caso. Apliquen teorema del seno o del coseno, según corresponda.

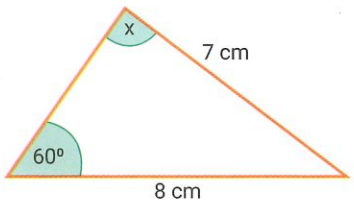
a.



b.



c.



43. Clasifiquen los triángulos según sus ángulos. Expliquen las respuestas.

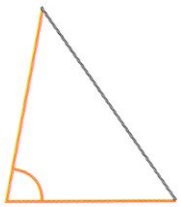
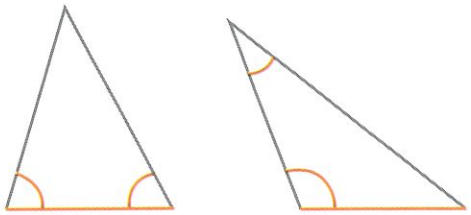
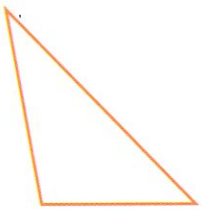
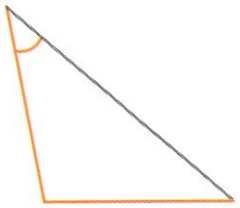
Datos	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
$\overline{ab} = 2$ cm $\overline{bc} = 4$ cm $\hat{c} = 30°$			
$\overline{ab} = 4$ cm $\overline{bc} = 4$ cm $\overline{ac} = 7$ cm			

42. Triángulos oblicuángulos

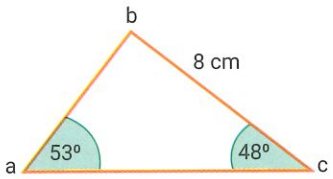
▶ SABERES DINÁMICOS

Un **triángulo** es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto, y resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y de sus tres lados. Para ello hay que aplicar los teoremas del seno y del coseno y la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Se pueden presentar distintos casos.

Dos lados y el ángulo comprendido	Un lado y dos ángulos
	
Los tres lados	**Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**
	

Resuelvan el siguiente triángulo oblicuángulo.



Se aplica el teorema del seno para calcular $\overline{ab}$.

$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$

$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen} 48°} = \frac{8\ cm}{\operatorname{sen} 53°} \Rightarrow \overline{ab} \,.\, \operatorname{sen} 53° = 8\ cm \,.\, \operatorname{sen} 48° \Rightarrow$$

$$\overline{ab} = \frac{8\ cm \,.\, \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 53°} \Rightarrow \mathbf{\overline{ab} \cong 7{,}44\ cm}$$

Para calcular $\hat{b}$ se aplica la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \Rightarrow \hat{b} = 180° - (53° + 48°) \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 79°}$$

Para calcular $\overline{ac}$ se aplica el teorema del coseno.

$$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - 2 \,.\, \overline{ab} \,.\, \overline{bc} \,.\, \cos \hat{b}$$

$$\overline{ac}^2 = (7{,}44\ cm)^2 + (8\ cm)^2 - 2 \,.\, 7{,}44\ cm \,.\, 8\ cm \,.\, \cos 79°$$

$$\overline{ac}^2 = 96{,}63\ cm^2$$

$$\mathbf{\overline{ac} \cong 9{,}83\ cm}$$

42. Triángulos oblicuángulos

Test de comprensión

44. Respondan y expliquen las respuestas.

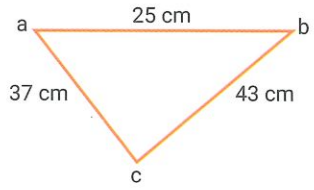
a. Si en un triángulo se conoce el valor de dos lados y el del ángulo comprendido, ¿se puede aplicar el teorema del seno para calcular el valor del tercer lado?

b. Si en el triángulo abc, el cos $\hat{b} < 0$, el triángulo ¿es obtusángulo?

c. ¿Es cierto que, si $\hat{c}$ es obtuso, en el triángulo abc se cumple $\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 + 2 \cdot \overline{ac} \cdot \overline{bc} \cdot \cos(\pi - \hat{c})$?

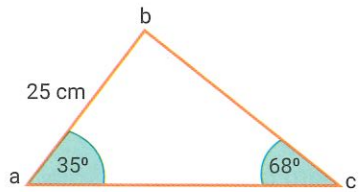
45. Calculen lo pedido en cada caso.

a.



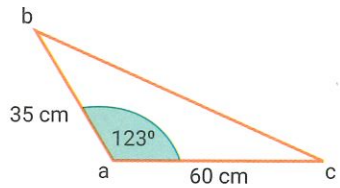
$\hat{b} =$ _____

b.



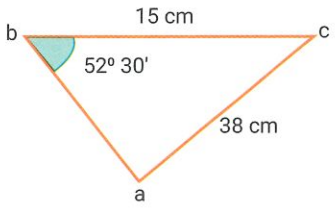
$\overline{ac} =$ _____

c.



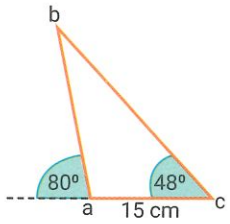
$\overline{bc} =$ _____ $\hat{b} =$ _____ $\hat{c} =$ _____

d.



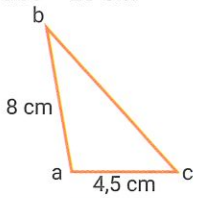
$\hat{a} =$ _____ Perímetro $\hat{abc} =$ _____

e.



$\overline{bc} =$ _____

f. Perímetro $\hat{abc} = 23$ cm



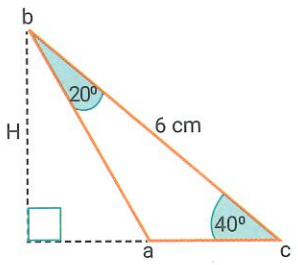
$\hat{a} =$ _____ $\hat{b} =$ _____ $\hat{c} =$ _____

42. Triángulos oblicuángulos

46. Observen las figuras y calculen lo pedido en cada caso.

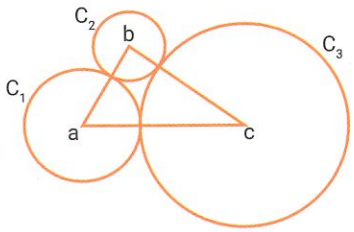
Para recordar pág. 155

a.



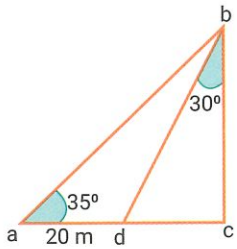
$\overline{ac}$ = _____ H = _____ Área $\overset{\frown}{abc}$ = _____

b. $C_1(a; 5)$; $C_2(b; 3)$; $C_3(c; 9)$



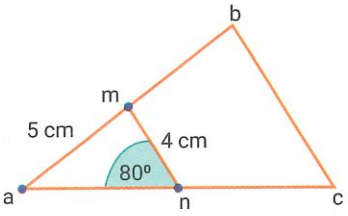
$\hat{a}$ = _____ $\hat{b}$ = _____ $\hat{c}$ = _____

c. $\overline{bc} \perp \overline{ac}$



$\overline{bd}$ = _____

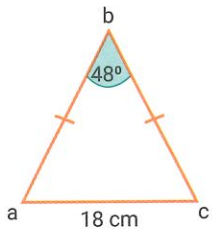
d. $\overline{mn}$ es base media



$\hat{a}$ = _____ $\hat{b}$ = _____ $\hat{c}$ = _____

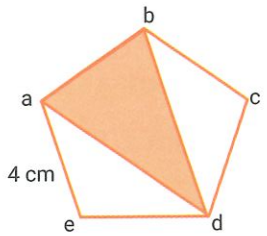
Perímetro $\overset{\frown}{abc}$ = _____

e. $\overset{\frown}{abc}$ es isósceles



Perímetro $\overset{\frown}{abc}$ = _____

f. abcde es pentágono regular

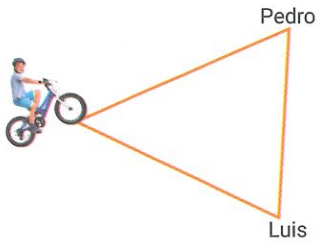


Perímetro $\overset{\frown}{abd}$ = _____

42. Triángulos oblicuángulos

47. Planteen y resuelvan las siguientes situaciones.

a. Juan tiene que llevar un paquete a la casa de Pedro; sube a su bicicleta y se desplaza por un camino recto a una velocidad promedio de 20 km/h. Tarda en llegar 1 h 30 min. Luego, va a lo de Luis por otro camino recto que forma un ángulo de 60° con el anterior y se desplaza a 15 km/h. Tarda 1 hora en llegar. ¿A que distancia (en línea recta) se encuentra Juan del punto de partida?



b. Tengan en cuenta los datos dados y calculen la mediana $\overline{bd}$ correspondiente a $\overline{ac}$.

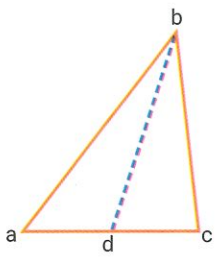
Para recordar pág. 155

Datos:

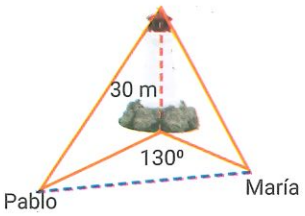
$\overline{ab}$ = 10 cm

$\overline{bc}$ = 8 cm

$\overline{ac}$ = 7 cm



c. Pablo observa el extremo superior de un faro de 30 m de altura bajo un ángulo de elevación (medido desde el suelo) de 31°. Desde otro lugar, María observa el mismo extremo bajo un ángulo de elevación (medido desde el suelo) de 39°. El ángulo que forma la distancia de Pablo al faro y del faro a María es de 130°. ¿A qué distancia se encuentra la base del faro de cada uno de ellos? ¿A que distancia se encuentra Pablo de María?

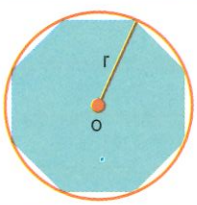


DinámicaMente

Tengan en cuenta los datos y calculen el perímetro del octógono regular.

Dato: área del círculo = 78,5 cm²

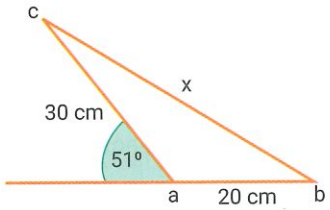
Perímetro =



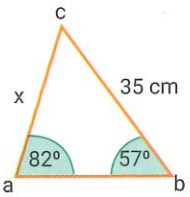
Integración final

48. Calculen el valor de "x" en cada caso.

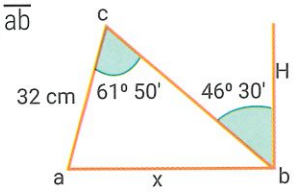
a.



b.

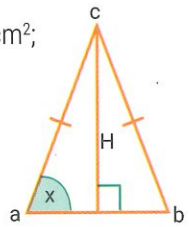


c. $H \perp \overline{ab}$



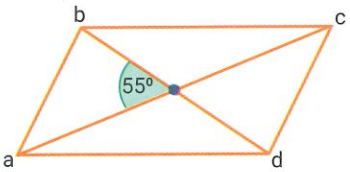
d. abc es triángulo isósceles.

Área $\hat{abc}$ = 135 cm²;
H = 15 cm



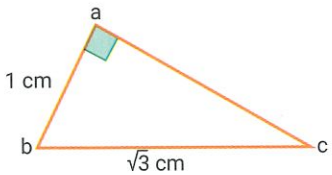
49. Observen las figuras y calculen lo pedido en cada caso.

a. $\overline{ac}$ = 10 cm; $\overline{bd}$ = 8 cm



Perímetro abcd =

b.



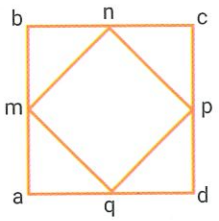
$\hat{b}$ =

$\hat{c}$ =

Área $\hat{abc}$ =

50. Calculen lo pedido en cada caso.

a. $\overline{ab} = \sqrt{2}$ cm; m, n, p, q puntos medios.



Perímetro del mnpq =

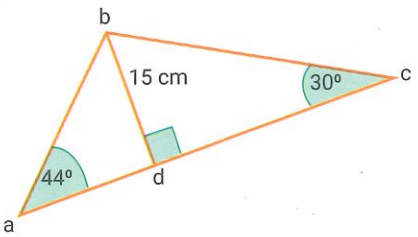
b. Uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide 12 cm. Los ángulos iguales son complementarios.

Altura =

c. Un árbol proyecta una sombra de 4 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal.

Altura del árbol =

d.



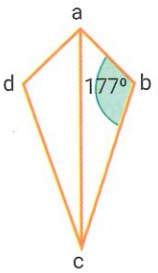
Área $\hat{abc}$ =

e. En un paralelogramo, la medida de un lado es de 14 cm, el perímetro es de 60 cm y el ángulo opuesto a una diagonal es de 130°.

Diagonal =

f. abcd es un romboide.

$\overline{ac}$ = 40 cm; $\overline{bc}$ = 31,6 cm; $\hat{b}$ = 117°



Perímetro del abcd =

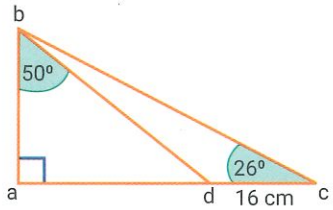
51. **Lean atentamente y resuelvan.**

a. Una persona de 1,60 m de altura proyecta una sombra de 45 cm. Encuentren el ángulo de elevación del sol en ese momento.

b. Desde un helicóptero que está volando a 800 m de altura se distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A cuántos kilómetros del pueblo está el helicóptero?

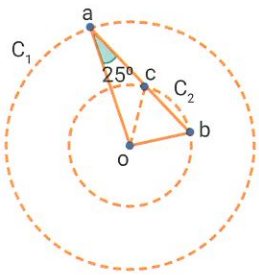
c. Calculen el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda mide 20 cm y el ángulo central correspondiente a esa cuerda es de 100°.

d. Calculen $\overline{ab}$ en el triángulo rectángulo.



e. Calculen $\overline{ac}$ y $\overline{cb}$ sabiendo que:

$C_1(o; 4{,}5\text{ cm})$; $C_2(o; 2{,}5\text{ cm})$



f. Dos autos parten desde un cruce de calles que forman cierto ángulo y cada uno toma una calle distinta. El primero marcha a una velocidad promedio de 50 km/h durante media hora; el segundo, en ese tiempo, recorre 30 km. En ese momento los dos autos se encuentran a una distancia de 40 km (en línea recta). Calculen la amplitud del ángulo que forman las calles al cruzarse.

52. **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. Para aplicar el teorema del seno alcanza con conocer el valor de dos ángulos. ☐

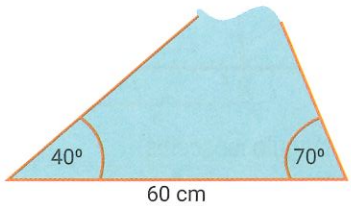
b. En el triángulo rectángulo se puede aplicar el teorema del coseno. ☐

c. Para aplicar el teorema del coseno alcanza con tener dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. ☐

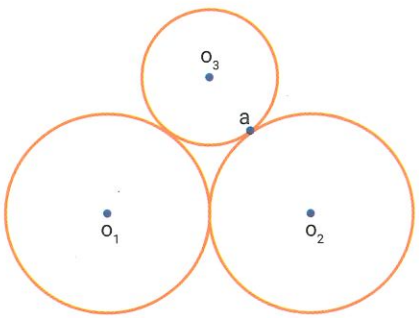
d. El teorema del seno solo se verifica en triángulos acutángulos. ☐

53. **Observen atentamente los dibujos y resuelvan.**

a. Al siguiente triángulo se le borró una parte. Calculen la longitud que tenían los lados que quedaron cortados.



b. $C_1(o_1; 3)$; $C_2(o_2; 3)$ y $C_3(o_3; 2)$ son tangentes externas. Calculen la distancia entre o_1 y a.



54. **Lean atentamente y resuelvan.**

Dos barcos se encuentran a 4,5 km y a 5,1 km de un faro, respectivamente. Se sabe que el ángulo que forman con el faro es de 76°. ¿Cuál es la distancia entre ambos barcos?

Para recordar

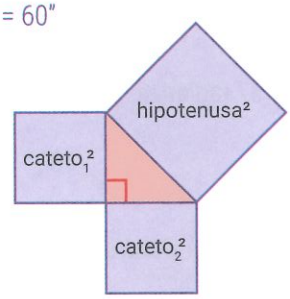
Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Sistema de medición de ángulos sexagesimal

$1° = \frac{1R}{90}$ $\quad 1' = \frac{1°}{60} \Rightarrow 1° = 60'$ $\quad 1'' = \frac{1'}{60} \Rightarrow 1' = 60''$

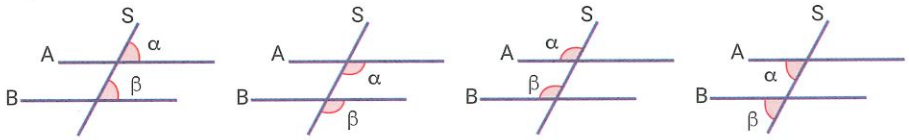
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**.



Ángulos correspondientes entre paralelas

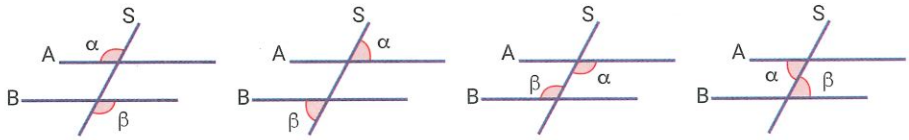
A // B; S es transversal a A y B.



• Los **ángulos correspondientes** entre paralelas tienen la misma amplitud.

Ángulos alternos entre paralelas

A // B; S es transversal a A y B.



• Los **ángulos alternos** entre paralelas tienen la misma amplitud.

Base media del triángulo

La **base media** de un triángulo es un segmento que tiene por extremos los puntos medios de un par de lados, es paralela a la base y mide la mitad de la base.

Polígono regular

Un **polígono regular** es aquel que tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales entre sí.

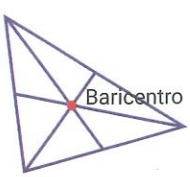
Suma de los ángulos interiores de un polígono

En todo polígono, la **suma de sus ángulos interiores** es igual a 180° . (n − 2), siendo "n" la cantidad de lados del polígono.

$$S_i = 180°. (n - 2)$$

Medianas de un triángulo

Las **medianas de un triángulo** son los segmentos que tienen por extremos el punto medio de un lado y el vértice opuesto a ese lado.



7 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

55. Si $\hat{\alpha} = 70°$, ¿cuál es su valor en radianes?

○ $\frac{7}{6}\pi$ ○ $\frac{5}{6}\pi$ ○ $\frac{7}{18}\pi$ ○ Ninguna de las anteriores.

56. Si $\hat{\beta} = 1{,}57$ radianes, ¿cuántos grados mide ese ángulo?

○ 90° ○ 100° ○ 80° ○ Ninguna de las anteriores.

57. Si sen $\hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y sec $\hat{\alpha} = 2$, ¿a qué es igual cotg $\hat{\alpha}$?

○ $-\sqrt{3}$ ○ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ○ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ○ Ninguna de las anteriores.

58. Si $\frac{1}{2}$. sen $(\hat{\alpha} - 30°) = -\frac{1}{4}$ y $\hat{\alpha} \in [180°; 270°]$, ¿cuál es el valor de $\hat{\alpha}$?

○ 210° ○ 240° ○ 225° ○ Ninguna de las anteriores.

59. Si cos $\left(\hat{\alpha} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\hat{\alpha}$ pertenece al segundo cuadrante, ¿cuál es el valor de $\hat{\alpha}$?

○ $\frac{2}{3}\pi$ ○ $\frac{5}{3}\pi$ ○ $\frac{7}{3}\pi$ ○ Ninguna de las anteriores.

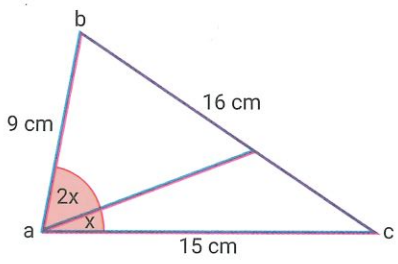
60. Si en el triángulo abc, $\overline{ab} = 7$ cm, $\overline{bc} = 6$ cm y $\hat{b} = 150°$, ¿cuánto mide $\overline{ac}$?

○ 10,77 cm ○ 9,21 cm ○ 12,5 cm ○ Ninguna de las anteriores.

61. A cierta hora del día, la sombra de Juan es la tercera parte de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el piso?

○ 63° 26′ 5″ ○ 71°33′ 54″ ○ 18° 26′ 5″ ○ Ninguna de las anteriores.

62. Tengan en cuenta el gráfico y respondan: ¿cuál es el valor de x?



○ 26° 26′ 33″ ○ 26° 33′ 26″ ○ 26° 26′ 43″ ○ Ninguna de las anteriores.

8 Estadística y probabilidad

43. Estadística. Intervalos de clase

▶ SABERES DINÁMICOS

Gráfico circular

Los **gráficos circulares** sirven para mostrar y comparar los porcentajes, ya que suministran la cantidad de datos que pertenecen a una misma categoría como una parte proporcional de un círculo.
El **ángulo central** correspondiente a cada sector circular se calcula de la siguiente manera:

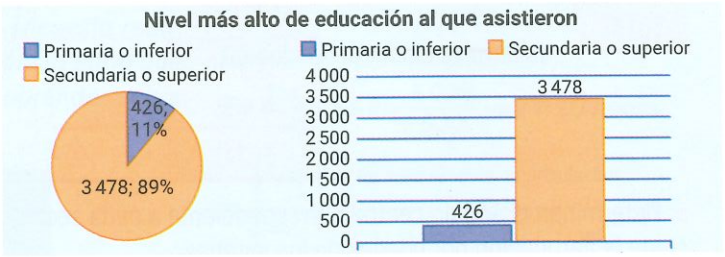
$$\text{Ángulo central} = \frac{\text{frecuencia absoluta} \cdot 360°}{\text{total de observaciones}}$$

Gráfico de barras

Los **gráficos de barras** muestran la frecuencia correspondiente a cada categoría de la variable, y permiten compararlas entre sí.

Los siguientes gráficos representan los resultados de una encuesta realizada a 3 904 mujeres entre 15 y 49 años pertenecientes al AMBA. *Fuente: Encuesta Nacional de Niñas, Niños y Adolescentes (MICS).*

x: nivel de educación más alto al que asistieron	f	%
Primaria o inferior	426	10,9
Secundaria o superior	3 478	89,1
TOTAL	3 904	100%



Intervalos de clases

Cuando se cuenta con un gran número de datos cuantitativos, es conveniente organizarlos de manera tal que resulte más rápida su lectura. Para ello se puede recurrir a una distribución de frecuencias agrupadas en **intervalos de clase.** Para poder armar los intervalos de clase, se deben identificar el menor y el mayor dato de la distribución, y establecer el número de intervalos que se desea.

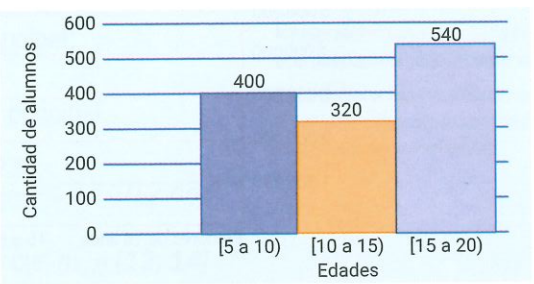
$$\text{Amplitud de cada intervalo} = \frac{\text{dato mayor} - \text{dato menor}}{\text{cantidad de intervalos}}$$

Se debe elegir un representante de cada intervalo. En general se elige el punto medio del intervalo llamado **marca de clase** (x_n).

$$x_n = \frac{\text{límite inferior} + \text{límite superior}}{2}$$

En la siguiente tabla se registraron los datos de una situación utilizando intervalos de clase.

x: edad de los alumnos en años	f	x_n	F (frecuencia acumulada)
[5 a 10)	400	7,5	400
[10 a 15)	320	12,5	720
[15 a 20)	540	17,5	1 260



ACTIVIDADES

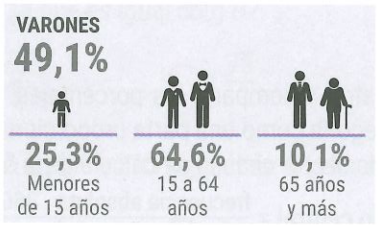
43. Estadística. Intervalos de clase

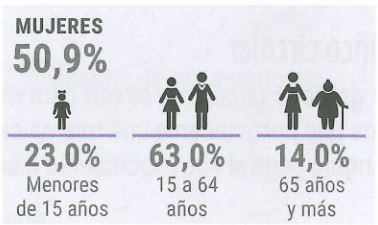
Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   - a. En un gráfico circular, ¿es cierto que al ángulo central de 120° le corresponde el 30% de la muestra?
   - b. La variable de una muestra, ¿es siempre cuantitativa?
   - c. Si la frecuencia relativa $\left(\frac{f}{\text{total de la muestra}}\right)$ en una muestra de 150 personas es de 0,2, la frecuencia absoluta correspondiente ¿es 30?

2. Observen las siguientes infografías y resuelvan.

Fuente: www.estadistica.ec.gba.gov.ar





a. Completen las siguientes tablas.

	f	%
Varones		
Mujeres		
TOTAL		

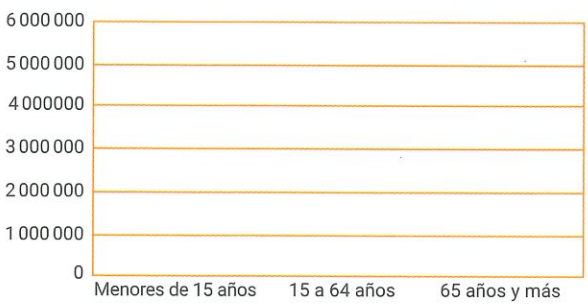
Varones	f	%
Menores de 15 años		
15 a 64 años		
65 años y más		
TOTAL		

Mujeres	f	%
Menores de 15 años		
15 a 64 años		
65 años y más		
TOTAL		

b. Determinen el ángulo central correspondiente a cada sector y construyan un gráfico circular que represente la agrupación por edades de los varones.

Varones	Ángulo central
Menores de 15 años	
15 a 64 años	
65 años y más	
TOTAL	

c. Realicen un histograma que represente la agrupación por edades de las mujeres.



44. Parámetros de posición

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **media aritmética** (o promedio) al cociente entre la suma de los productos resultantes de multiplicar cada valor de la variable por su correspondiente frecuencia absoluta y el total de observaciones.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_1 . f_1 + x_2 . f_2 + \ldots + x_n . f_n}{n} = \frac{\sum x_n . f_n}{n}$$

La tabla muestra los resultados de una encuesta realizada a un grupo de docentes, acerca de la cantidad de horas que han hablado con sus estudiantes sobre la seguridad on line *en el último año.*

x: tiempo en horas	f	x . f	F
0	93	0	93
1	88	88	181
2	99	198	280
3	44	132	324
4	226	904	550

$\sum x . f = 1\,322 \qquad n = 550$

$\bar{x} = \frac{\sum x_n . f}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1\,322}{550} \Rightarrow \bar{x} \cong 2{,}4$ *horas*

El promedio de horas empleado fue 2,4 horas.

La **mediana** es el valor de la variable que ocupa la posición central o el promedio de los dos datos centrales.

Si se divide la población en dos partes $\left(\frac{n}{2} = 275\right)$, la mediana es el valor de la variable que contiene dicha frecuencia acumulada F, $m_e = 2$.

La **moda** es el valor de la variable de mayor frecuencia absoluta ($m_o = 4$).

Parámetros de posición para datos agrupados en intervalos

Se aplican las fórmulas utilizando la marca de clase:

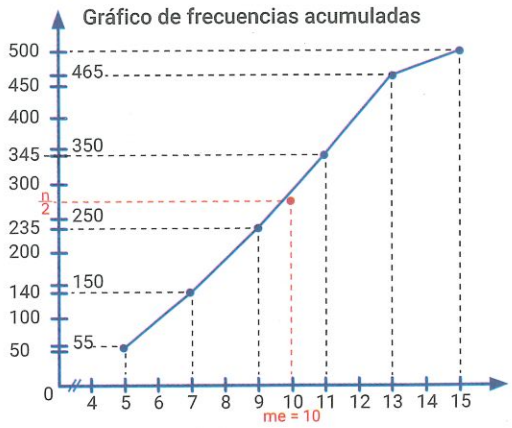
La tabla muestra los resultados de una encuesta realizada al azar a un grupo de docentes sobre la edad que consideran que los estudiantes deben aprender sobre seguridad on line *y ciudadanía digital.*

x: edad (en años)	f	x_n	$x_n . f$	F
[4; 6)	55	5	275	55
[6; 8)	85	7	595	140
[8; 10)	95	9	855	235
[10; 12)	110	11	1 210	345
[12; 14)	120	13	1 560	465
[14; 16)	35	15	525	500

$\sum x_n . f = 5\,020 \qquad n = 500$

Cálculo de la media aritmética

$\bar{x} = \frac{\sum x_n . f}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{5\,020}{500} \Rightarrow \bar{x} \cong 10$ *horas*



- Cálculo de la mediana: $m_e = A + \frac{\frac{n}{2} - B}{C} . D$

n: población. Se debe localizar a $\frac{n}{2}$ en la frecuencia acumulada y ver a qué clase pertenece. Dicha clase es la **clase principal.**

A: límite inferior de la clase principal.

B: frecuencia acumulada de la clase que antecede a la principal.

C: frecuencia absoluta de la clase principal.

D: amplitud de la clase principal.

$m_e = 10 + \frac{\frac{500}{2} - 235}{110} . 2 \cong 10{,}2$ *años*

- **Intervalo modal:** intervalo de clase con mayor frecuencia. $m_o = [12; 14)$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/DiagCaja * para profundizar sobre otros parámetros de posición como el diagrama de caja.

*Enlace acortado de https://es.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-data-statistics/cc-6th-box-whisker-plots/v/reading-box-and-whisker-plots

44. Parámetros de posición

Test de comprensión

3. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Los valores de la media, la moda y la mediana, ¿pueden coincidir?

b. El valor de la moda, ¿siempre es único?

c. Los valores de una muestra están comprendidos entre 7 y 15. ¿El valor de la media puede ser 15,5?

4. Lean atentamente y resuelvan.

La cara obtenida al tirar un dado una cantidad de veces está dada por la siguiente tabla.

Cara	1	2	3	4	5	6
f	5	3	2	1	3	5

a. ¿Cuántas veces se tiró el dado? _____

b. Calculen:

m_e = _____ m_o = _____

c. ¿Qué porcentaje de veces salió una cara menor o igual que 4? _____

5. Marquen con una X la opción correcta.

María obtuvo un promedio de 6 puntos en sus primeras cuatro evaluaciones de ciencias. En la quinta obtuvo 8 puntos. ¿Cuál es el promedio de sus cinco notas?

$\bar{x} = 7$ ☐ $\bar{x} = 6{,}4$ ☐ $\bar{x} = 6{,}5$ ☐

6. Resuelvan, sabiendo que $\bar{x} = \frac{3.5 + 6.1 + 2.4 + 2.3}{3 + 6 + 4 + 2}$.

a. ¿Cuál es el tamaño de la muestra? _____

b. Calculen m_e y m_o _____

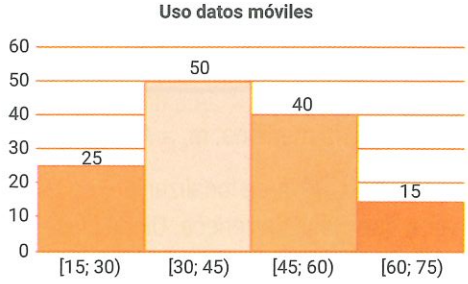
c. Realicen en sus carpetas un gráfico de barras.

7. Observen y respondan.

El siguiente gráfico indica la cantidad de personas, agrupadas por edades, encuestadas al azar que hacen uso de datos móviles en su celular.

a. Completen la tabla.

Intervalo de edades	x_n	f	$x_n \cdot f$	F
[15; 30)				



b. ¿Cuántas personas usan datos móviles? _____

c. Calculen la media de las edades, la mediana y el intervalo modal. _____

45. Parámetros de dispersión

▶ SABERES DINÁMICOS

Desviación estándar

La **desviación estándar** mide la dispersión de los datos con respecto al promedio.

Dos ciudades, "A" y "B", registraron distintas temperaturas máximas durante una misma semana de mayo. Si se busca el promedio de las temperaturas, ambas tienen el mismo promedio 9 °C; pero "A" tiene temperaturas más estables que "B".

Temperatura máxima "A"	f	$(x_i - \bar{x})^2 . f$
4 °C	1	$(4-9)^2 . 1 = 25$
9 °C	2	$(9-9)^2 . 2 = 0$
10 °C	3	$(10-9)^2 . 3 = 3$
11 °C	1	$(11-9)^2 . 1 = 4$

Temperatura máxima "B"	f	$(x_i - \bar{x})^2 . f$
3 °C	1	$(3-9)^2 . 1 = 36$
5 °C	1	$(5-9)^2 . 1 = 16$
6 °C	1	$(6-9)^2 . 1 = 9$
9 °C	1	$(9-9)^2 . 1 = 0$
11 °C	2	$(11-9)^2 . 2 = 8$
18 °C	1	$(18-9)^2 . 1 = 81$

Se define como **varianza**: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f}{n}$

La **desviación estándar** es: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f}{n}}$

$\sigma_A = \sqrt{\frac{32}{7}} \cong 2{,}1$ $\quad$ $\sigma_B = \sqrt{\frac{150}{7}} \cong 4{,}6$

El valor de este parámetro es mayor cuando los datos están muy disgregados o dispersos y es menor cuando están más concentrados. Como $\sigma_A < \sigma_B$, entonces B es más disperso que A.

Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación** expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media aritmética.

$$\text{Coeficiente de variación } Cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} . 100 \Rightarrow Cv = \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{n}}}{\bar{x}} . 100$$

Para el caso de las ciudades "A" y "B", el coeficiente de variación es:

$Cv_A = \frac{2{,}1}{9} . 100 \cong 23{,}3\%$ $\quad$ $Cv_B = \frac{4{,}6}{9} . 100 \cong 51\%$

Cuando el coeficiente de variación es inferior al 30%, la distribución es bastante homogénea. Se utiliza para comparar la homogeneidad de dos series de datos, aun cuando estén expresadas en distintas unidades. A medida que el coeficiente de variación disminuye, se observa una mayor homogeneidad en los datos, o lo que es lo mismo, los datos están más concentrados alrededor del promedio.

$\bar{x} = \frac{193}{32} \Rightarrow \bar{x} \cong 6$

$\sigma = \sqrt{\frac{193}{32}} \Rightarrow \sigma \cong 1{,}79$

$Cv = \frac{1{,}79}{6} . 100 \Rightarrow Cv \cong 29{,}8\%$

La distribución es bastante homogénea.

x: nota	f	x . f	$(x_i - \bar{x})^2 . f_i$
3	5	15	45
4	1	4	4
5	5	25	5
6	8	48	0
7	6	42	6
8	4	32	16
9	3	27	27
Sumatoria	32	193	103

ACTIVIDADES

45. Parámetros de dispersión

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que la desviación estándar de una muestra nunca puede ser 0?

b. Dos muestras que tienen la misma media, ¿tienen la misma varianza?

c. ¿Es cierto que si a cada una de las observaciones de una variable, se le suma un mismo número, la desviación estándar no se altera?

9. Tengan en cuenta los resultados obtenidos al generar números aleatorios comprendidos entre el 1 y el 5 que están representados en la tabla y resuelvan.

Número	1	2	3	4	5
f	5	5	2	3	6

a. ¿Cuántos números aleatorios se generaron? _____

b. Calculen el valor de la media aritmética. _____

c. Calculen la desviación estándar. _____

d. Realicen el gráfico de barras en sus carpetas.

e. Calculen el coeficiente de variación (Cv). _____

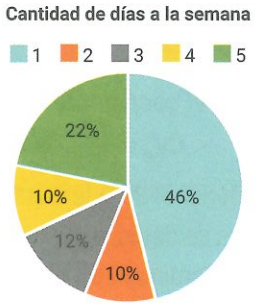
f. Indiquen si los datos están más o menos concentrados alrededor de la media. _____

10. Lean atentamente y resuelvan.

Una encuesta realizada a estudiantes de un colegio, acerca de la cantidad de veces por semana que tuvieron contacto con sus docentes durante el aislamiento por la pandemia de COVID, arrojó los siguientes resultados. 500 de ellos contestaron que se conectaban con la frecuencia indicada en el gráfico.

a. Completen la tabla.

Cantidad días a la semana	f
1	
2	
3	
4	
5	



b. De los alumnos que se conectaron con sus docentes, en promedio, ¿cuántas veces lo hicieron?

_____

c. Calculen el Cv de los alumnos que tuvieron contacto con los docentes. _____

d. Analicen los datos y enuncien una conclusión. _____

e. Se sabe que solo 76,6% del total de alumnos se han conectado. ¿Cuántos alumnos no tuvieron contacto con sus docentes? _____

f. ¿Cuál es la matrícula total del colegio? _____

45. Parámetros de dispersión

11. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. El nivel de colesterol en sangre de una población de jóvenes tiene por $\bar{x}$ = 202 y Cv = 7%.

$\sigma \cong 14$ ☐ $\sigma \cong 3{,}4$ ☐ $\sigma \cong 7$ ☐

b. Se realizó un estudio de la edad de los estudiantes de 1.er año de un establecimiento, según el turno que concurren.

	Turno mañana	Turno tarde	Turno vespertino
σ	1,5	0,5	1
$\bar{x}$	14	15	16

¿En cuál de los cursos hay edades más dispersas?

• A ☐ • B ☐ • C ☐

c. ¿En qué caso σ = 0?

• No es posible. ☐ • Los datos son iguales. ☐ • Los datos son cercanos a la media. ☐

12. Resuelvan.

La siguiente tabla registra talla (en cm) de los niños recién nacidos el día de ayer en una maternidad.

Talla (cm)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)
f	3	5	6	3

a. ¿Cuántos niños nacieron en la maternidad el día de ayer? _____

b. Calculen la talla media y el intervalo modal. _____

c. ¿Qué porcentaje de los niños nacieron con una talla menor a 45 cm? _____

d. ¿Las tallas están bastante concentradas alrededor de la media? _____

13. Lean atentamente y respondan.

Según el sitio https://weather.com, las temperaturas registradas entre las 9:00 y las 22:00 en la ciudad de San Nicolás, Buenos Aires, el día 3/6/2022, fueron:

Horario del día (h)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Temperatura en °C	11	11	12	13	14	14	14	14	13	13	12	12	12	12

a. Realicen una tabla de temperatura-frecuencia.

Temperatura (°C)				
f				

b. Calculen la temperatura media de los registros del día . _____

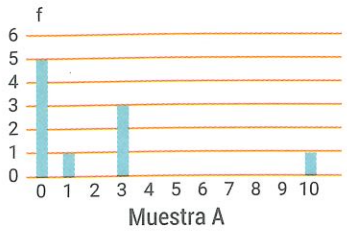
c. Calculen la mediana. _____

d. Calculen Cv e indiquen si la muestra es homogénea. _____

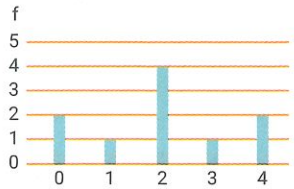
45. Parámetros de dispersión

14. Lean y resuelvan.

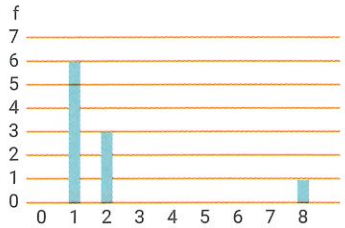
Los siguientes gráficos representan la distribución de tres muestras distintas.



Muestra A



Muestra B



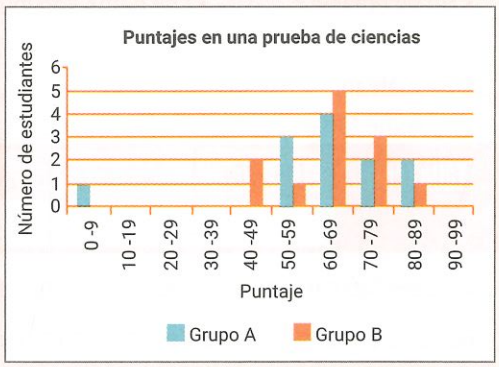
Muestra C

a. Hallen y comparen las medias de cada muestra. _____

b. Sabiendo que las siguientes desviaciones estándar corresponden a las muestras, indiquen cuál es a cada una.

- $\sigma = 1{,}34$ ☐
- $\sigma = 2{,}04$ ☐
- $\sigma = 2{,}96$ ☐

15. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.
El siguiente gráfico muestra los resultados en una prueba de ciencias (puntaje máximo 100) para dos grupos de estudiantes, designados como "grupo A" y "grupo B".
El puntaje promedio para el grupo A es 62 y el promedio para el grupo B es 64,5. Los estudiantes aprueban cuando su puntaje es de 50 o más. Al observar los resultados de este gráfico, el profesor concluye que al grupo B le fue mejor que al A en esta prueba. Los estudiantes del grupo A no están de acuerdo con su profesor.



a. Discutan y brinden un argumento matemático que pueden usar los estudiantes del grupo A para convencer a su profesor de que al grupo B no le fue necesariamente mejor.

_____

_____

DinámicaMente

Los diagramas de tallo y hoja son una forma de representar datos de una muestra. Los tallos representan las decenas y las hojas, las unidades.

Tallo	Hoja			
1	5	6		
2	1	2	3	4
3	0	2		
4	1			

a. ¿Cuántos elementos tiene la muestra?

b. ¿Cuáles son los elementos de la muestra?

16. Observen la tabla y resuelvan.

Se registraron las edades de un grupo de chicos que concurrieron a una consulta médica el día de ayer.

Edad	f
3	1
5	1
6	1
7	2
8	1
9	2
12	1
16	2

a. ¿Cuántos niños concurrieron?

b. Calculen la media, la mediana y la moda.

c. Marquen con una X la respuesta correcta.

- La mitad de los niños tiene una edad menor que:

9 ☐ 8 ☐ 7 ☐

- El 25% de los niños tiene una edad mayor que:

8 ☐ 9 ☐ 12 ☐

d. Realicen un gráfico de barras.

17. Resuelvan.

La siguiente tabla registra los resultados obtenidos al arrojar un dado 20 veces.

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	4	a	4	b	2	2

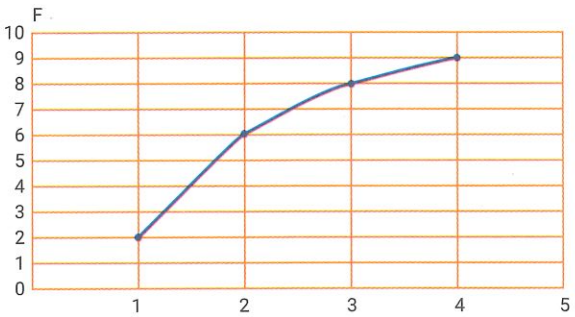
a. Calculen el valor de a y b para que $\bar{x} = 3$.

18. Marquen con una X la respuesta correcta sabiendo que a cada una de las observaciones de una variable se la incrementa en 3.

- m_e no cambia. ☐
- m_e se incrementa en 3. ☐
- m_e se multiplica por 3. ☐

19. Observen atentamente y respondan.

El siguiente es un gráfico de frecuencias acumuladas.



a. Completen la tabla de frecuencia.

x_i	f
1	
2	
3	
4	

b. Calculen la desviación estándar.

c. Si a cada una de las x_i se las multiplica por 5, ¿qué sucede con la desviación estándar? Marquen con una X la respuesta correcta.

- Se incrementa en 5 ☐
- Se multiplica por $\sqrt{5}$ ☐
- Se quintuplica. ☐

20. Lean atentamente y resuelvan.

La muestra A tiene coeficiente de variación del 30% y una media de 10, mientras que la B tiene coeficiente de variación del 48% y una media de 3. ¿Qué muestra tiene una desviación estándar menor?

21. Observen la siguiente tabla y respondan.
La siguiente tabla registra los nacimientos inscriptos en el Registro Civil (CABA), entre el 2011 y el 2019. Fuente: www.estadisticaciudad.gob.ar

Año	Mujer	Varón
2011	21 700	22 557
2012	20 875	21 831
2013	20 736	21 902
2014	20 952	21 757
2015	20 105	20 808
2016	19 080	19 874
2017	17 036	17 985
2018	16 715	17 925
2019	16 298	17 099

a. Calculen el promedio de mujeres inscriptas entre el 2011 y el 2019.

b. Calculen el promedio de varones inscriptos entre el 2011 y el 2019.

c. ¿En qué año se registró la mayor cantidad de varones inscriptos? ¿A qué parámetro de posición corresponde?

d. Calculen el coeficiente de variación para cada serie y expliquen qué representa.

22. Lean atentamente y resuelvan.
Se hizo un relevamiento de la cantidad de menores de 20 años que habitan en el barrio "A" y se obtuvieron los siguientes datos.

Edades	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Cantidad	9 800	10 500	10 000	6 200

a. ¿Cuántas personas menores de 20 años habitan el barrio "A"?

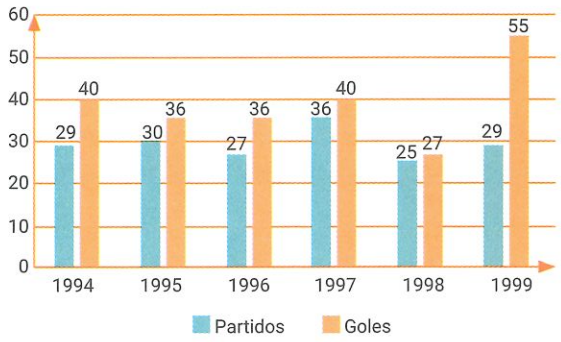
b. ¿Cuál es la edad promedio?

c. Calculen la mediana.

d. Indiquen el intervalo modal.

e. Calculen el coeficiente de variación y clasifiquen la serie.

23. Lean la siguiente información y resuelvan.
Según la Asociación Rosarina de Fútbol, Lionel Messi jugó en la escuela de fútbol infantil del club Newell's Old Boys hasta los 12 años.
El siguiente gráfico muestra la cantidad de partidos jugados por año y la cantidad de goles convertidos.



a. Completen la tabla.

Equipo	Año	Partidos	Goles
Newell's "A" (Categoría 87) Argentina			

b. Calculen el promedio de partidos jugados en ese período.

c. Calculen el promedio de goles que alcanzó en ese período.

d. ¿En qué años se registró la moda de los goles?

e. Calculen para cada serie la desviación estándar y el Cv.

f. Indiquen si las series son bastante homogéneas.

g. Indiquen cuál de las dos series presenta los valores más distribuidos alrededor de la media.

46. Probabilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado depende del azar; por ejemplo, arrojar un dado, sacar una carta de un mazo o un número de un bolillero, etc.

Un **suceso S** es uno de los resultados posibles y el **espacio muestral E** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio: por ejemplo, al elegir una vocal, el espacio muestral es E = {a; e; i; o; u}.

La probabilidad de que un suceso ocurra es $P(S) = \frac{\text{Números de casos favorables}}{\text{Números total de casos}} = \frac{\#S}{\#E} \wedge 0 \leq P(S) \leq 1.$

Se saca un botón al azar de una caja que contiene 3 botones cuadrados y 5 redondos. El espacio muestral se puede definir como E = {cuadrado, redondo}, pero al calcular el número total de casos posibles, hay que considerar la cantidad total de botones: #E = 8. La probabilidad de sacar un botón de una forma determinada es: $P(\text{cuadrado}) = \frac{3}{8} \wedge P(\text{redondo}) = \frac{5}{8}$.

Se sabe que de los botones cuadrados: 2 son verdes y 1 es negro; de los redondos: 1 es verde y los restantes son negros.

Se consideran ahora dos sucesos en el espacio muestral E: $\{c_1; c_2; c_3; r_1; r_2; r_3; r_4; r_5\} \rightarrow \#(E) = 8.$

Suceso A: *se extrae un botón cuadrado.* $\{c_1; c_2; c_3\} \rightarrow \#(A) = 3$

Suceso B: *se extrae un botón negro.* $\{c_3; r_2; r_3; r_4; r_5\} \rightarrow \#(B) = 5$

La probabilidad de que A y B ocurran se llama **probabilidad compuesta:** $P(A \text{ y } B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#E}$

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un botón salga un botón cuadrado y negro?

$$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{8} \begin{cases} \#(A \cap B) \\ \#E \end{cases}$$

La probabilidad de que A o B ocurran se llama **probabilidad total:** $P(A \text{ o } B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E}$

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un botón salga un botón cuadrado o negro?

$$P(A \text{ o } B) = \frac{7}{8} \begin{cases} \#(A \cup B) \\ \#E \end{cases}$$

Un espacio muestral es equiprobable cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Se tira una moneda equilibrada.

$E = \{\text{cara; ceca}\} \rightarrow \#E = 2$

$P(\text{cara}) = P(\text{ceca}) = \frac{1}{2}$ *Es igualmente probable que al tirar una moneda caiga cara o ceca.*

Áreas Dinámicas [Matemática y ESI]

El Sistema de Indicadores de Derechos de Niñas, Niños y Adolescentes del gobierno de CABA se nutre de información estadística, proveniente en sus propios registros administrativos, de censos de población y de encuestas a hogares. Para el caso de las encuestas a hogares se reúne información de una muestra probabilística de personas u hogares que han sido seleccionados para que representen a una población o subpoblación mayor. Su objetivo es proveer información integral, relevante, mensurable, confiable y oportuna sobre la situación de la niñez y adolescencia.

Fuente: https://www.estadisticaciudad.gob.ar/eyc/?page_id=102612

46. Probabilidad

Test de comprensión

24. Respondan y expliquen las respuestas.

a. La probabilidad de que ocurra un suceso ¿puede ser mayor que 1?

b. La probabilidad de un suceso ¿puede ser 0?

c. Si P(A o B) = P(A) + P(B), entonces ¿A ∩ B = Ø?

25. Lean atentamente y resuelvan.

Un bolillero contiene bolillas numeradas del 1 al 9. Se extrae una al azar.

a. Escriban el espacio muestral.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída sea par?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída sea múltiplo de 3?

d. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolilla par y múltiplo de 3?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla extraída sea par o múltiplo de 3?

26. Lean el siguiente enunciado y calculen las probabilidades solicitadas.

Para recordar pág. 175

Se quiere armar una clave de tres dígitos distintos elegidos entre el 1, 2, 3, 4.

a. ¿Cuántas claves distintas se pueden formar? _____

b. La probabilidad de elegir una clave que empiece con 3. _____

c. La probabilidad de elegir una clave mayor que 400. _____

d. La probabilidad de elegir una clave cuyos dígitos sean todos pares. _____

e. La probabilidad de elegir una clave que empiece con 2 y sea par. _____

27. Resuelvan en cada caso.

Se sabe que los sucesos A y B pertenecen al mismo espacio muestral.

P(A) = 0,7 P(B) = 0,4 P(A o B) = 0,9

Calculen P(A y B) = _____

28. Resuelvan.

Se lanzan al aire una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el dado y cara en la moneda?

47. Sucesos y probabilidad condicional

▶ SABERES DINÁMICOS

Sucesos mutuamente excluyentes e independientes

Dos **sucesos** son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo.
En este caso: **P(A y B) = 0**.
Si A y B son mutuamente excluyentes, **P(A o B) = P(A) + P(B)**.
Si A y B no son mutuamente excluyentes, **P(A o B) = P(A) + P(B) − P(A y B)**.
Dos **sucesos** son **independientes** cuando el hecho de que ocurra uno de los dos no altera la probabilidad de que ocurra el otro.

En una caja hay 4 bolitas rojas (R), 4 verdes (V); se elige una bolita al azar.
$P(R) = \frac{1}{2}$ $P(V) = \frac{1}{2}$ *Es igualmente probable que sea roja o verde.*

Si para elegir una segunda bolita no se repone la primera, cambia la probabilidad, ya que cambia #R o #V y #E = 7. Se dice entonces que los sucesos son **dependientes.**
Si se repone la bolita en la caja, la probabilidad de que el segundo sea R o V es igual que para el primero.
Para averiguar una probabilidad compuesta, se puede utilizar la siguiente fórmula.

Probabilidad de que sucedan A y B a la vez: P(A y B) = P(A) . P(A/B)

Si A y B son independientes: **P(A y B) = P(A) . P(B)**

Probabilidad condicional

Se llama **probabilidad condicional** a los casos donde se quiere conocer la probabilidad de un suceso sabiendo que ha ocurrido otro.

$$\text{Probabilidad de B si se conoce A: } P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

Si A y B son independientes: **P(B/A) = P(B)**

Se extraen dos caramelos de un paquete que tiene 5 de limón y 3 de menta.
La probabilidad de que el segundo sea de limón si el primero es de menta es:

$$P(L/M) = \frac{P(M \text{ y } L)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$$

Si se repone en el paquete el primer caramelo, la probabilidad de que el segundo sea de menta si el primero es de limón, es:

$P(L/M) = P(L) = \frac{5}{8}$, *porque son sucesos independientes.*

ACTIVIDADES

47. Sucesos y probabilidad condicional

Test de comprensión

29. Respondan y expliquen las respuestas.

a. #(A o B) = 8; #(A) = 5 y #(B) = 3, entonces ¿A y B son sucesos mutuamente excluyentes?

b. Si P(A/B) = P(B/A), ¿es cierto que A y B son sucesos equiprobables?

c. Si A y B son dos sucesos del mismo espacio muestral y complementarios, entonces ¿P(A) = 1 − P(B)?

30. Lean atentamente y calculen.

Para recaudar dinero para un viaje, un grupo de amigos prepara una rifa con números del 1 al 500. Calculen las siguientes probabilidades.

Para recordar pág. 175

a. Que el número ganador sea impar. _____

b. Que el número ganador sea múltiplo de 6. _____

c. Que el número ganador sea impar y múltiplo de 6. ¿Son sucesos mutuamente excluyentes?

_____

d. Que el número ganador sea impar o múltiplo de 6. _____

e. La probabilidad de que el número ganador no sea múltiplo de 6. _____

f. Si se sortean dos números, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo número sea múltiplo de 3 si el primero también lo fue? _____

31. Calculen en cada caso la probabilidad solicitada.

a. A y B son sucesos mutuamente excluyentes, $P(A) = \frac{2}{5}$ y $P(A \text{ o } B) = \frac{1}{2}$.
$P(B) =$ _____

b. A y B son sucesos complementarios y P(B) = 0,64.
$P(A) =$ _____

c. $P(A/B) = \frac{3}{4}$; $P(A \text{ y } B) = \frac{3}{10}$
$P(B) =$ _____

32. Resuelvan. Tengan en cuenta que el 0 es un número par.

Un bolillero contiene 10 bolillas numeradas del 0 al 9.

a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer, sin reposición, una bolilla par si ya extrajeron dos bolillas pares?

_____

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la primera, par; la segunda, impar y la tercera, impar?

_____

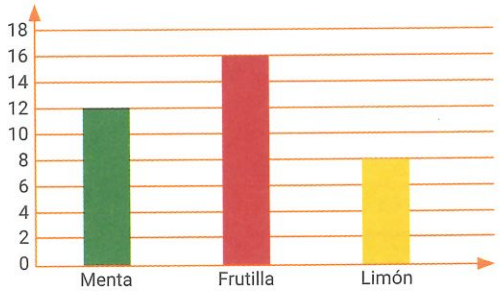
c. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos bolillas y que ambas sean múltiplo de 3?

_____

47. Sucesos y probabilidad condicional

33. Observen el gráfico y respondan.

En un frasco hay caramelos de distintos gustos. El número de caramelos de cada gusto está dado por el siguiente gráfico.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos caramelos, el primero sea de menta y el segundo, de limón?

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un caramelo de frutilla, si ya se extrajo otro de frutilla?

c. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un caramelo de limón, si ya se extrajeron uno de menta y otro de frutilla?

34. Tengan en cuenta el gráfico de la actividad anterior y resuelvan.

a. Completen la tabla.

Caramelos	Menta	Frutilla	Limón	Total
Duros	8		5	
Masticables		10		
Total				

b. ¿Qué porcentaje de los caramelos son duros?

c. Calculen la probabilidad de elegir un caramelo masticable.

d. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un caramelo de frutilla y masticable?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un caramelo de frutilla duro o de limón masticable?

f. Calculen la probabilidad de extraer un caramelo duro, si se sabe que es de frutilla.

g. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos caramelos masticables y uno duro (en ese orden)?

47. Sucesos y probabilidad condicional

35. Resuelvan.

Un juego contiene 25 fichas entre redondas y triangulares. Las fichas pueden ser blancas o negras.

a. Completen la tabla.

	Blancas	Negras	TOTAL
Redondas		6	
Triangulares	7		
TOTAL	15		

b. Calculen la probabilidad de extraer al azar:

- una ficha que sea negra. _____
- dos fichas tal que la primera sea blanca y la segunda, negra. _____
- una negra, si ya se extrajo una blanca. _____
- una ficha blanca y redonda. _____
- una ficha negra o redonda. _____
- una ficha blanca, si se sabe que es triangular. _____

36. Lean atentamente y resuelvan.

a. En un estante hay 6 cajas; 2 de ellas están vacías.

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir sucesivamente 2 y que ambas estén vacías?

_____

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir sucesivamente dos y que una sola esté vacía?

_____

b. Se sabe que 60 de los pacientes que concurren a un policonsultorio tienen sobrepeso y de ellos un 5% tiene diabetes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar sea diabético, si se sabe que no tiene sobrepeso? _____

c. En un cajón hay 5 medias rojas y 3 azules, encuentren la probabilidad de:

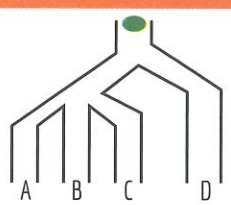
- sacar una media al azar que no sea azul. _____
- sacar una media azul, si ya se sacó una roja. _____
- sacar una media roja y otra azul (en ese orden). _____

DinámicaMente

Se arroja una pelota verde por un tubo donde, en cada bifurcación, la probabilidad de cada camino es la misma.

a. Calculen la probabilidad de que la pelota salga por B.

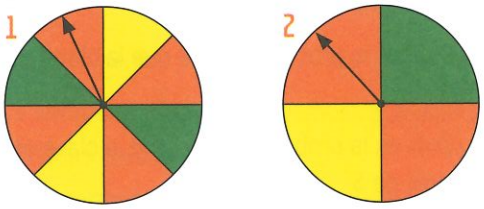
b. Calculen la probabilidad de que la pelota salga por A o por D.



Integración final

37. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

Cada vez que giran los discos, la aguja cae en algún sector.



a. P(amarillo disco 1) < P(amarillo disco 2) ☐

b. P(verde disco 1) = P(verde disco 2) ☐

c. P(naranja disco 2) > P(naranja disco 1) ☐

d. La probabilidad de que al girar simultáneamente los discos y que salgan los dos amarillos es $\frac{1}{4}$. ☐

38. Tengan en cuenta los datos y calculen.

Se tira un dado equilibrado.
A: el número es par.
B: el número es múltiplo de 3.

a. P(A) =

b. P(B) =

c. P(A y B) =

d. P(A o B) =

39. Se lanzan dos dados simultáneamente.

Calculen la probabilidad de que en al menos en un dado salga el 6.

40. Lean atentamente y resuelvan.

Se forman números de 5 dígitos distintos elegidos entre 1, 2, 5, 6 y 7.

a. ¿Cuántos números se pueden formar?

b. Calculen la probabilidad de:

- elegir un número al azar que sea par.
- que el segundo dígito sea par, si el primero es impar.

41. Resuelvan.

Una empresa realiza un control de calidad sobre sus matafuegos. La probabilidad de que alguno necesite recarga es 0,1. Se prueban dos matafuegos elegidos al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos necesiten recarga?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primero necesite recarga y el otro no, o que ninguno necesite recarga?

42. Tengan en cuenta el enunciado y respondan.

Se arrojan simultáneamente un dado y una moneda. Calculen la probabilidad de que:

a. salga el 2 en el dado y cara en la moneda.

b. salga un número mayor que 3 en el dado y ceca en la moneda.

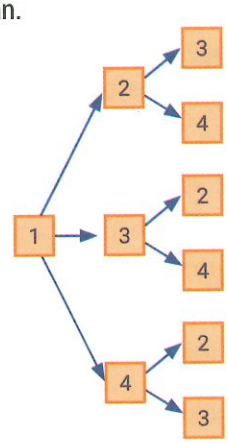
c. no salga un múltiplo de 2 en el dado.

d. en el dado salga 3.

e. salga 4 o número impar en el dado y cara en la moneda.

43. Observen el siguiente diagrama de árbol y respondan.

Para recordar pág. 175



a. Enumeren el espacio muestral.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar, los dígitos sumen 6?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número al azar, sea par?

44. **Reúnanse con un compañero y resuelvan.**

Se eligen aleatoriamente a dos personas de un grupo formado por 3 mujeres y 2 hombres.

a. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir las personas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas personas sean mujeres?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una mujer y un hombre?

45. **Respondan.**

Se extrae una carta de un mazo de 48 naipes españoles (sin comodines).

a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta que sea oros?

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta que sea oros o un 5?

Se extraen dos cartas seguidas.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea de espadas, si la primera también lo es?

d. ¿Y si la primera carta se repone en el mazo?

46. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. A : Arrojar un dado. B: arrojar una moneda. A y B son sucesos independientes. ☐

b. Arrojar un dado. A: Obtener el 6. B: Obtener un número impar. A y B no son sucesos mutuamente excluyentes. ☐

c. P(A o B) = P(A) + P(B) en todos los casos. ☐

d. P(B) = 1 − P(A), entonces A y B son complementarios en el mismo espacio muestral. ☐

47. **Calculen la probabilidad de tirar una moneda tres veces seguidas y que no salga ninguna cara.**

48. **Lean atentamente y resuelvan.**

Para recordar pág. 175

Julio quiere abrir su candado y olvidó la clave que está compuesta por tres dígitos que se pueden repetir, comprendidos entre 0 y 9.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la clave sea 074?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la clave sea múltiplo de 5?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los dígitos no se repitan?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la clave tenga los tres dígitos distintos y pares?

49. **Completen la tabla y respondan.**

Se realiza un control de calidad sobre latas de dos gaseosas distintas "A" y "B".

	A	B	Totales
Defectuosas	10	20	
No defectuosas	90	80	
Totales			

a. Calculen la probabilidad de que al elegir una lata al azar:

- sea defectuosa.
- sea defectuosa y de la marca "A".
- no sea defectuosa, si se sabe que es de "B".
- sea de "B", si se sabe que es defectuosa.

b. ¿Qué porcentaje de las latas son defectuosas?

c. ¿Qué porcentaje de las latas de "A" no son defectuosas?

Para recordar

Explicaciones de temas de años anteriores que pueden ser útiles para resolver algunas actividades de este capítulo.

Sucesos complementarios

Son aquellos que si no se da uno, obligatoriamente se tiene que dar el otro.
Por ejemplo: al tirar una moneda, si no sale cara, obligatoriamente sale ceca.

Combinatoria

La **combinatoria** estudia técnicas que permiten contar cuántos elementos tiene un conjunto con determinadas características.

- **Permutación sin repetición** es cada una de las formas posibles de ordenar **n** elementos distintos.

$$P_n = n!$$

¿De cuántas maneras se pueden acomodar en hilera las siguientes figuras?
$P_3 = 3! = 6$ *Se pueden acomodar de 6 maneras distintas.*

- **Variaciones sin repetición** de elementos son las distintas formas que existen para agrupar **m** elementos distintos en grupos distintos de **n** elementos. $V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$

Los grupos son distintos cuando tienen los mismos elementos, pero en distinto orden o por lo menos un elemento distinto. Por lo tanto, en la variación importa el orden que tengan los elementos en el grupo.
Dani compró 4 libros distintos para repartir entre sus amigos. Hoy se va a encontrar con tres de ellos. ¿De cuántas maneras distintas los puede repartir?

$V_3^4 = \frac{4!}{1!} = 24 \rightarrow$ *Los puede repartir de 24 maneras distintas.*

- **Variaciones con elementos repetidos:** $V_n^m = m^n$

¿Cuántas claves de tres dígitos se pueden formar, utilizando solo el 0 y el 1?
$V_3^2 = 2^3 = 8 \rightarrow$ *Se pueden formar 8 claves distintas.*

- **Combinaciones sin repetición** son las distintas formas que existen para agrupar **m** elementos diferentes en grupos distintos de **n** elementos, de manera tal que los grupos difieran en por lo menos un elemento.

$$C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

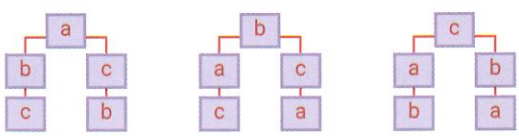
¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un pentágono?

$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \rightarrow$ *Se pueden formar 10 triángulos distintos.*

Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es una forma gráfica de representar las distintas posibilidades.

Indiquen todas las maneras posibles que se pueden acomodar las letras a, b, c.



8 Autoevaluación

Marquen la opción correcta

50. En una cartuchera hay 3 lapiceras y 2 lápices.

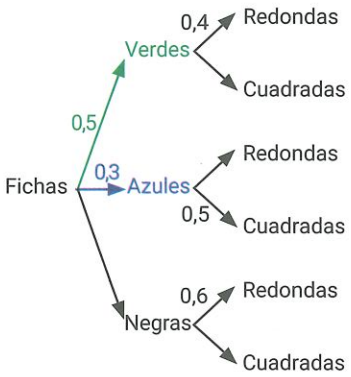
a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir dos elementos al azar y que sean dos lapiceras?

◯ 0,3 ◯ 0,5 ◯ 0,2

b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir dos elementos al azar y que ambos sean iguales?

◯ 0,4 ◯ 0,3 ◯ 0,1

51. El diagrama de árbol representa las probabilidades de extraer una ficha al azar.



a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha redonda y azul?

◯ 0,15 ◯ 0,4 ◯ 0,2

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha cuadrada, si se sabe que es verde?

◯ 0,2 ◯ 0,4 ◯ 0,6

c. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha verde, si se sabe que es redonda?

◯ 0,4 ◯ 0,43 ◯ 0,5

52. Una empresa fabrica dos tipos de reproductores portátiles. Los reproductores se prueban al finalizar la producción diaria, los defectuosos se retiran y se envían a reparar.

Tipo de reproductor	Media de reproductores fabricados por día	Porcentaje de reproductores defectuosos
Reproductor portátil de D.V.D.	2 000	5%
Reproductor portátil de audio	6 000	3%

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un reproductor al azar que sea de D.V.D.?

◯ $\frac{1}{3}$ ◯ $\frac{1}{4}$ ◯ $\frac{1}{5}$

b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un reproductor al azar que no sea defectuoso?

◯ 0,965 ◯ 0,925 ◯ Ninguna de las anteriores.

c. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un reproductor de audio, si se sabe que tiene que ser reparado?

◯ 0,03 ◯ 0,64 ◯ 0,30